МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

І ТЕОРІЯ РЯДІВ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 186 «Видавництво та поліграфія»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Вища математика. Елементи теорії поля і теорія рядів. Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,27 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 110 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 25.01.2018 р.)
за поданням Вченої ради ФМФ (протокол № 8 від 22.12.2017р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

І ТЕОРІЯ РЯДІВ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Укладачі: *Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Поліщук Наталія Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Горбачук В. М.,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти: *Станжицький О. М.*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Величко О. М., канд. техн. наук, доц.

Навчальний посібник відповідає навчальній програмі дисципліни «Вища математика» спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» підготовки студентів Видавничо-поліграфічного інституту. Наведено 20 варіантів індивідуальних розрахункових завдань за темами «Елементи теорії поля» та «Теорія рядів». Показано застосування теоретичного матеріалу до розв’язування типових практичних задач у відповідності до варіанту. Додатки містять необхідний довідковий матеріал деяких тем курсу вищої математики.

Для студентів ВПІ КПІ ім. Ігоря Сікорського та інших факультетів, інститутів, які вивчають вищу математику та зацікавлених осіб.

Зміст

Передмова

За навчальними планами наявна певна кількість годин для написання студентами денної форми навчання розрахункової роботи. Ґрунтовне вивчення кредитного модуля «Вища математика-3» передбачає забезпечення студентів необхідною начально-методичною літературою. Для кредитних модулів «Вища математика-1» та «Вища математика-2» наявні як методичні вказівки [7], [8], так і навчальні посібники [9], [10], [11].

У збірник завдань для розрахункової роботи (РР) включено завдання із тем «Елементи теорії поля», «Теорія рядів», які відповідають робочій навчальній програмі відповідного кредитного модуля. В збірнику наведено 20 різних варіантів завдань для РР, проведено розв’язування типових прикладів, що допомагає студентові вивчати, знайомитись із основними формулами, правилами, теоремами теоретичної частини матеріалу, працювати над виконанням індивідуальної роботи. Навчальне видання містить також додатки основних формул за відповідними темами.

Збірник завдань призначено для студентів денної форми навчання технічних спеціальностей. Його можна використати для домашніх контрольних робіт студентам заочної форми, також для підготовки до занять, заліків, екзаменів студентам всіх форм навчання, які вивчають подібний матеріал.

Частина I

Елементи теорії поля

1. 1. Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl;\quad L-$ коло $x^2 + y^2 = 4.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,$ де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1).$

3. Обчислити масу дуги кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $x = \sqrt{3}$ і $x = \sqrt{8}$, якщо густина дуги в кожній її точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

4. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint\limits_L \left(-x^2 y\right)ydx + xy^2 dy,$ де L: $x^2 + y^2 = 25-$ коло, яке пробігається проти руху годинникової стрілки.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S \left(2x + 3y + 2z\right)dS,\quad (p): x + 3y + z = 3.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)zdxdy,$ де $S-$ зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = 3x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x-z)\vec{k},\ (p):\quad x + 3y + z = 3.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k},\ (p):\quad 2x+y+2z=2.$$

9. Задана функція $u(M)=x^2y+y^2z+z^2x$ і точки $M_1(1,-1,2)$, $M_2(3,4,-1)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+zy)\vec{j}+xy\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ в точці $M_0(0,1,-2)$.

Варіант 2

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$; L – відрізок прямої між точками $O\,(0,0)$ і $B\,(2,2)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L \frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$; L – дуга астроїди $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t$ від точки $A\,(2,\,0)$ до точки $B\,(0,\,2)$.

3. Довести, що даний вираз

$$\left(\frac{y}{x}+\ln y+2x\right)dx+\left(\frac{x}{y}+\ln x+1\right)dy$$

є повним диференціалом функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.

4. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint\limits_L\left(-x^2y\right)ydx+xy^2dy$, де L:

$x^2 + y^2 = 1-$ коло, яке пробігається проти руху годинникової стрілки.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint_S (2 + y - 7x + 9z)dS, \quad (p): 2x - y - 2z = -2.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S z^2 dxdy,$ де S – зовнішня сторона поверхні еліпсоїда $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2.$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (3x-1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \ (p): \quad 2x - y - 2z = 2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \ (p): \quad 3x + 2y + z = 6.$$

9. Задана функція $u(M) = x^3 + xy^2 - 6xyz$ і точки $M_1(1, 3, -5)$, $M_2(4, 2, -2)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = xy\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + xz\vec{k}$ в точці $M_0(2, 0, 3)$.

Варіант 3

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$; L_{AB} – відрізок прямої між точками $A(0,4)$ і $B(4,0)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{L} (x+y)dx-(x-y)dy$; $L=OAB$ – ламана, яка з'єднує точки $O(0,0), A(2,0),$ $B(4,5)$.

3. Знайти масу кривої $x=at,\ y=\frac{a}{2}t^2,\ z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\le t\le 1)$, густина якої змінюється за законом $\rho=\sqrt{\frac{2y}{a}}$.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F}=xy\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y=x$ від точки (0,0) до точки (1,1).

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_{S} (6x+y+4z)dS, \quad (p): 3x+3y+z=3.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{S} zdxdy+ydxdz+xdydz,$ де S – зовнішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1.$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k},\ (p):\quad 3x+3y+z=3.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (y+z)\vec{i} + x\vec{j} + (y-2z)\vec{k}, \ (p): \quad 2x+2y+z=2.$$

9. Задана функція $u(M) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x}$ і точки $M_1(-1,1,1)$, $M_2(2,3,4)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + z\vec{k}$.У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} - x^2\vec{k}, \ M_0(1, -2, 0)$.

Варіант 4

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \dfrac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}}$; L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1+\cos\varphi), 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy$; L – дуга кола $x = 5\cos t, \ y = 5\sin t$ від точки $A(5, 0)$ до точки $B(0,5)$ (рух вважати проти руху годинникової стрілки).

3. Знайти координати центра мас чверті однорідного кола $x^2 + y^2 = a^2$, яка лежить в першому квадранті.

4. Довести, що даний вираз $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$ та знайти цю функцію.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (x + 2y + 3z)dS, \quad (p): x + y + z = 2.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (z+1)dxdy$, де $S-$ зовнішня сторона поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=16$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k},\ (p):\quad x+y+z=2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k},\ (p):\quad x+3y+2z=6.$$

9. Задана функція $u(M)=\ln\left(1+x^2-y^2+z^2\right)$ і точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(5,-4,8)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}$.У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля

$$\vec{a}(M)=xz\vec{i}+z\vec{j}+yz\vec{k},\ M_0(3,0,1).$$

Варіант 5

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$; L – дуга кривої $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sqrt{3}t,\ 0\le t\le 2\pi.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$; L – контур трикутника ABC з вершинами в точках $A(1,0), B(1,1), C(0,1)$ (рух вважати проти руху годинникової стрілки).

3. Обчислити моменти інерції відносно осей координат відрізка однорідної прямої $2x+y=1$, який відтинається цими осями.

4. Довести, що даний вираз $(ye^{xy}+y^2)dx+(xe^{xy}+2xy)dy$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint_S \left(3x-2y+6z\right)dS, \quad (p): 2x+y+2z=2.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S yzdydz+xzdxdz+xydxdy,$ де S – верхня сторона площини $x+y+z=4,$ що відтинається координатними площинами.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}, \ (p): \quad 2x+y+2z=2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}, \ (p): \quad x+2y+2z=2.$$

9. Задана функція $u(M)=10\Big/\left(x^2+y^2+z^2+1\right)$ і точки $M_1(-1,2,-2)$, $M_2(2,0,1)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}$.У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = xy\vec{i} + xyz\vec{j} - x\vec{k},\ M_0(-1, 0, 3)$.

Варіант 6

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$; L – відрізок прямої між точками $O\,(0,0)$ і $A\,(1,2)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L ydx - xdy$; L – дуга еліпса $x = 6\cos t,\ y = 4\sin t$ в додатному напрямку обходу його контура.

3. Обчислити момент інерції відносно осі OY дуги напівкубічної параболи $y^2 = x^3$ між точками з абсцисами $x = 0$ і $x = 4/3$.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по контуру квадрата, який утворений прямими $x = \pm 1,\ y = \pm 1.$

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S, де S є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (2x + 3y + 2z)dS, \quad (p): x + 3y + z = 3.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2dydz + 2y^2dxdz - zdxdy$, де S – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з ортом $\vec{k}$), що відтинається площиною $z = 1$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (2y - z)\vec{i} + (y + x)\vec{j} + x\vec{k},\ (p): \quad x + 2y + 2z = 4.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (y - z)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + z\vec{k},\ (p):\quad 2x + y + z = 2.$$

9. Задана функція $u(M) = x^2 y + y^2 z - 3z$ і точки $M_1(0, -2, -1)$, $M_2(12, -5, 0)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = (y + x)\vec{i} - 2(z + y)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = yz\vec{i} - z^2\vec{j} + xyz$ в точці $M_0(2, 1, -1)$.

Варіант 7

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{L_{OB}} ydl;\quad L$ – дуга параболи $y^2 = \frac{2}{3}x$ між точками $O\,(0,0)$ і $B\left(\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{\sqrt[4]{35}}{3}\right)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{L} y^2 dx + x^2 dy;\quad L$ – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$.

3. Обчислити координати центра мас однорідної дуги однієї арки циклоїди $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$.

4. Довести, що даний вираз $(y - \sin x)dx + (x - 2y\cos y^2)dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$ та знайти цю функцію.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (3x+4y+z)dS, \quad (p): x+2y-z=6.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S yzdydz - x^2dxdz - y^2dxdy,$ де S – частина поверхні конуса $y^2 = x^2 + z^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з ортом $\vec{j}$), що відтинається площиною $y=0,\ y=1$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (2x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (x+2z)\vec{k},\ (p): \quad x-y+z=2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = x\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (2x-y+2z)\vec{k},\ (p): \quad x+2y+2z=2.$$

9. Задана функція $u(M) = (x-y)^z$ і точки $M_1(1, 5, 0)$, $M_2(3, 7, -2)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = 3x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} - 2xyz\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = y^2\vec{i} - xy\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точці $M_0(-2, 1, 1)$.

Варіант 8

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{L_{AB}} ydl$; L – дуга астроїди $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$ між точками $A(1{,}0)$ і $B(0{,}1)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L xdy$; L – дуга правого півкола $x^2+y^2=a^2$ від точки $A(0,-a)$ до точки $B(0,a)$.

3. Обчислити статичний момент відносно осі OX однорідної дуги кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F}=(x+y)\vec{i}-x\vec{j}$ при переміщенні по колу $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ за рухом годинникової стрілки.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (2x-y+z)dS,\quad (p): x+y+z=4.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2dydz-z^2dxdz+zdxdy$, де S – частина поверхні параболоїда $z=3-x^2-y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з ортом $\vec{k}$), що відтинається площиною $z=0$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k},\ (p):\quad 2x+3y+z=6.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k},\ (p):\quad 3x+2y+2z=6.$$

9. Задана функція $u(M) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3$ і точки $M_1(1, 2, -1)$, $M_2(0, -1, 3)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = xz\vec{i} - xyz\vec{j} + x^2 z\vec{k}$ в точці $M_0(0,1,1)$.

Варіант 9

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$; L – перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t),\ \ y = 2(1 - \cos t)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L y^2 dx + x^2 dy$; L – дуга параболи $y = 4 - x^2$ в верхній півплощині (рух вважати за годинниковою стрілкою).

3. Обчислити координати центра мас однорідної дуги першого витка гвинтової лінії $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t.$

4. Обчислити $\int\limits_L xye^x dx + (x-1)e^x dy$; L – будь-яка крива, яка з’єднує точки $A(0, 2)$ і $B(1, 2)$.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S, де S є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint\limits_S \left(6x + y + 4z\right)dS, \quad (p): 3x - 2y + z = 6.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz - zdxdy$, де S – частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$

(нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з ортом $\vec{k}$), що відтинається площинами $z=0, z=3$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(x+z)\vec{k},\ (p):\quad 3x-2y+2z=6.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k},\ (p):\quad 2x+y+z=4.$$

9. Задана функція і $u(M)=x^{yz}$ точки $M_1(3,1,4)$, $M_2(1,-1,-1)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=yz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+z^2\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=xy\vec{i}-y^2z\vec{j}-xz\vec{k}$ в точці $M_0(0,-2,1)$.

Варіант 10

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (3x+4y+2z-2)dl$; L – відрізок прямої між точками $A(4,-3,6)$, $B(2,-5,5)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$; L – дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ від точки $O\,(0,0)$ до точки $B\,(1,2)$.

3. Знайти масу лінії $y = a\,\mathrm{ch}\left(x/a\right)$ між точками з абсцисами $x_1 = 0$ та $x_2 = a$, якщо густина в кожній її точці обернено пропорційна ординаті точки і $\rho(0,a) = \gamma,\ \gamma = Const$.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат в точку (1,1) по параболі $y = x^2$.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S, де S є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S \left(4x - 4y + z\right)dS, \quad (p): x + y + 2z = 2.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2 dydz + zdxdy$, де S – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з ортом $\vec{k}$), що відтинається площиною $z = 4$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = 4z\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + z)\vec{k},\ (p):\quad x - 2y + 2z = 2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = \left(A, B, C\right)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (2z - x)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + 3z\vec{k},\ (p):\quad x + 4y + 2z = 6.$$

9. Задана функція $u(M) = e^{xy + z^2}$ і точки $M_1(-5, 0, 2)$, $M_2(2, 4, -3)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

2) $\overrightarrow{\mathrm{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = xz\vec{i} - y\vec{j} - zy\vec{k}$ в точці $M_0(0,1,2)$.

Варіант 11

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}\,dl$; L – дуга тангенсоїди $y = \mathrm{tg}x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L xdy$; L – контур трикутника, утвореного при перетині прямих $y = x,\ x = 2,\ y = 0,$ в його додатному напрямку обходу.

3. Обчислити статичний момент відносно осі OY відрізка прямої $y = 2 - x,$ що відтинається координатними осями, якщо лінійна густина в кожній точці пропорційна квадрату абсциси цієї точки і для точки (2,0) дорівнює 8.

4. Довести, що даний вираз $(20x^3 - 21x^2 y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$ та знайти цю функцію.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (7x + y + 2z)dS, \quad (p): x - y + 4z = 8.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ яка лежить в першому октанті.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (2z - x0\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + 3z\vec{k}, \ (p): \quad x + 4y + 2z = 8.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = 4z\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + z)\vec{k}, \ (p): \quad x - 2y + 2z = 2.$$

9. Задана функція $u(M) = 3x^2yz^3$ і точки $M_1(-2, -3, 1)$, $M_2(5, -2, 0)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
2) $\overrightarrow{\mathrm{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = (2x - 3y)\vec{i} + 2xy\vec{j} - z^2\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = y^2\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точці $M_0(-1, 2, 1)$.

Варіант 12

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L xy^2 dl$; L – дуга кола $x = R\cos t,\ y = R\sin t,$ яка знаходиться в першій чверті.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L ydx - xdy$; L – чверть кола $x = R\cos t,\ y = R\sin t$ в першому квадранті (рух вважати проти руху годинникової стрілки).

3. Обчислити статичні моменти відносно осей OX і OZ дуги першого витка гвинтової лінії $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = t,$ якщо лінійна густина пропорційна аплікаті точки і в точці $t = \pi$ дорівнює 1.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат в точку (1,1) по параболі $y = x^2$.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint_S (9x + y - z)dS, \quad (p): x + y + 3z = 9.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, де *S* є частиною поверхні гіперболоїда $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з ортом $\vec{k}$), що відтинається площинами $z = 0, z = \sqrt{3}.$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = 4x\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + 2z)\vec{k}, \ (p): \quad 2x + y + z = 4.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + 2(x + z)\vec{k}, \ (p): \quad 3x - 2y + 2z = 6.$$

9. Задана функція $u(M) = x^y - 3xyz$ і точки $M_1(2, 2, -4)$, $M_2(1, 0, -3)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=2xyz\vec{i}-y(1+zy)\vec{j}+z\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=xy\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ в точці $M_0(1,-1,1)$.

Варіант 13

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$; L – відрізок прямої між точками $A(1,1,1)$, $B(3,0,3)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L \cos z dx-\sin x dz$; L – відрізок прямої, яка з'єднує точки $A(2,0,-2)$ і $D(-2,0,2)$.

3. Знайти координати центра мас дуги астроїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $x\ge 0,\ y\ge 0$ відносно осей координат, якщо лінійна густина стала і дорівнює 1.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+2y\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат в точку (1,-3) по параболі $y=-3x^2$.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (4x+y+z)dS,\quad (p): 2x+3y+4z=12.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (2y^2-z)dxdy$, де S є частиною поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\vec{k}$), що відтинається площиною $z=2$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (x + 2z)\vec{i} + (y - 3z)\vec{j} + z\vec{k}, \ (p): \quad 3x + 2y + 2z = 6.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (x + y + z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y - 7x)\vec{k}, \ (p): \quad 2x + 3y + z = 6.$$

9. Задана функція $u(M) = \ln(x^3 + y^3 + z + 1)$ і точки $M_1(1, 3, 0)$, $M_2(-4, 1, 3)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = (x^2 - z^2)\vec{i} - 3xy\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ в точці $M_0(2, 1, 0)$.

Варіант 14

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \sqrt{1 + 4y + 9xz}\,dl$; L – дуга кривої $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y - a}dy$; L – дуга циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}.$

3. Обчислити центр маси кривої $y = 2x^2, |x| \le 2$, якщо $\rho = 1.$

4. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint\limits_L \left(- x^2 y\right) y dx + xy^2 dy$, де L: $x^2 + y^2 = 64 -$ коло, яке пробігається проти руху годинникової стрілки.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint\limits_S (5x + y + 2z)dS, \quad (p): x + 2y + 3z = 12.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2 dydz + z^2 dxdy,$ де *S* – частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\vec{k}$), що лежить між площинами $z = 0, z = 1.$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}, \ (p): \quad x + 2y + 2z = 2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (2x - z)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}, \ (p): \quad x - y + z = 2.$$

9. Задана функція $u(M) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5$ і точки $M_1(1, 2, 1)$, $M_2(-3, -2, 6)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = xy\vec{i} - (y + z)\vec{j} + xz\vec{k}$ в точці $M_0(4, 0, 1)$.

Варіант 15

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \sqrt{1+\frac{x}{R}}dl;\quad L$ – дуга кривої $x = R\sin^2 t,\ y = R\sin t\cos t,\ z = R\cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (x^2+y^2)dx + (x+y^2)dy;\quad L = ABC$ – ламана, що з'єднує точки $A(1,2)$, $B(3,2), C(3,5)$.

3. Обчислити момент інерції відносно початку координат контуру квадрата зі сторонами $x = \pm a,\ y = \pm a.$ Густину квадрата вважати сталою.

4. Обчислити $\int\limits_L 2y\sin x dx - \cos 2x dy;\quad L$ – будь-яка лінія від точки $A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ до точки $B\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S, де S є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (2x+4y+6z)dS,\quad (p): 3x - y + 2z = 6.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz,$ де S – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\vec{k}$), яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (y-z)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + z\vec{k},\ (p):\quad 2x+y+z=2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною $(p):\ Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (2z - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (3x + z)\vec{k},\ (p):\quad x + y + 2z = 2.$$

9. Задана функція $u(M) = \ln(1 + x + y^2 + z^2)$ і точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(3, -5, 1)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} - yz\vec{j} + x^2z\vec{k}$ в точці $M_0(-3, 0, 2)$.

Варіант 16

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\oint\limits_L (x - y)dl;\quad L -$ коло $x^2 + y^2 = 2x.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L xydx + (y - x)dy;\quad L$ – дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $A(0, 0)$ до точки $D(1, 1).$

3. Обчислити момент інерції відносно осі OX однорідного відрізка прямої $y = 2x$ між точками (1,2) і (2,4).

4. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + 2y\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат в точку (1,-3) по параболі $y = -3x^2$.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint\limits_S (x + y + 2z)dS,\quad (p): x + 3y + z = 3.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{S} yzdxdy + xzdydz + xydxdz,$ де S – зовнішня поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 1,$ яка відтинається площинами $z = 0, z = 5.$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (x + y - z)\vec{i} - 2y\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}, \ (p): \quad x + 2y + z = 2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (2y - z)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + x\vec{k}, \ (p): \quad x + 2y + 2z = 4.$$

9. Задана функція $u(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ і точки $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(5, -1, 4)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = 3x^2\vec{i} + 4(x - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = (x + y^2)\vec{i} + yz\vec{j} + x^2z\vec{k}$ в точці $M_0(1, 0, 4)$.

Варіант 17

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{L} \sin^2 x \cos^3 x dl; \quad L -$ дуга лінії $y = \ln\cos x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{L_{AB}} (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2 dy;$ L – дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$.

3. Обчислити статичні моменти відносно координатних осей однорідної дуги астроїди $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ 0 \le t \le \pi/2$.

4. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint\limits_L \left(- x^2 y\right) y dx + y^2 dy,$ де L: $x^2 + y^2 = 1 -$ коло, яке пробігається проти руху годинникової стрілки.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами

$$\iint\limits_S \left(x + 3y + 2z\right) dS, \quad (p): 2x + y + 2z = 2.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz,$ де S – верхня частина площини $x + y + z = 1,$ яка відтинається координатними площинами.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + 3y\vec{j} + (y - z)\vec{k},\ (p): \quad 2x - y - 2z = -2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = \left(A, B, C\right)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + y\vec{k},\ (p): \quad x + y + 2z = 2.$$

9. Задана функція $u(M) = y^2 z - 2xyz + z^2$ і точки $M_1(3, 1, -1)$, $M_2(-2, 1, 4)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{grad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+2xyz\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=xz\vec{i}-y\vec{j}+yz\vec{k}$ в точці $M_0(0,-1,4)$.

Варіант 18

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\oint\limits_L (x^2+y^2)^2 dl; L-$ коло $x^2+y^2=4x.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L 2xydx+y^2dy+z^2dz;$ $L=AB$ – дуга одного витка гвинтової лінії $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t,\ A(1,0,0),\ B(1,0,4\pi).$

3. Знайти статичний момент відносно осі Oy однорідної дуги першого витка лемніскати Бернуллі $\rho^2=a^2\cos 2\varphi.$

4. Довести, що даний вираз $\dfrac{x+y}{xy}dx+\dfrac{y-x}{y^2}dy$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (5x-y+5z)dS, \quad (p): 3x+2y+z=6.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy,$ де *S* – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1.$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k},\ (p):\quad x-y+z=2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k},\ (p):\quad 2x+2y+z=4.$$

9. Задана функція $u(M)=5x^2yz-xy^2z+yz^2$ і точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(9,-3,9)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=3(x-z)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+3z\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=xy\vec{i}-x\vec{j}+yz$ в точці $M_0(2,2,2)$.

Варіант 19

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (x^2+y^2)^2\,dl; L-$ перша чверть кола $\rho=2$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L xdy-ydx;\quad L-$ контур трикутника з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,0), C(0,1)$ в додатному напрямку обходу.

3. Обчислити масу дуги кривої $\rho=3\sin\varphi, 0\le\varphi\le\pi/4$, якщо густина в кожній її точці пропорційна відстані до полюса і для $\varphi=\pi/4$ дорівнює 3.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F}=(x+5y^2)\vec{i}+2x^3y\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій з початку координат в точку (1,-3).

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* є частиною площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint\limits_S (2x+3y+z)dS, \quad (p): 2x+2y+z=6.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy,$ де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=16$ в першому октанті.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k},\ (p):\quad 2x-3y+z=6.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k},\ (p):\quad x+2y+z=2.$$

9. Задана функція $u(M)=xe^y+ye^x-z^2$ і точки $M_1(3,0,2)$, $M_2(4,1,3)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\mathrm{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=(y+x)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$ в точці $M_0(4,1,-3)$.

Варіант 20

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L xydl;$ L – контур квадрата зі сторонами $x = \pm 1,\ y = \pm 1.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy;$ $L = AB$ – ламана лінії $y = |x|$ від точки $A(-1, 1)$ до точки $B(2, 2).$

3. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + 2y\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат в точку (1,-3) по параболі $y = -3x^2.$

4. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint_L \left(-x^2 y\right) ydx + xy^2 dy,$ де L: $x^2 + y^2 = 16 -$ коло, яке пробігається проти руху годинникової стрілки.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні *S*, де *S* – частина площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами:

$$\iint_S (3x + 10y - z)dS, \quad (p): x + 3y + 2z = 6.$$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S \left(y^2 + z^2\right) dydz,$ де S є частиною поверхні параболоїда $x = 9 - y^2 - z^2$ (нормальний вектор поверхні $\vec{n}$ утворює гострий кут з ортом $\vec{i}$), яка відтинається площиною $x=0$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x + y - z)\vec{k}, \ (p): \quad x + 2y + z = 2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}, \ (p): \quad 2x + y + 3z = 6.$$

9. Задана функція $u(M)=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$ і точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(3,2,1)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=xy(3x-4y)\vec{i}+x^2(x-4y)\vec{j}+3z^2\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=(x-y)\vec{i}+yz\vec{j}-y\vec{k}$, в точці $M_0(-4,1,0)$.

1.2. Розв'язування типових прикладів

1.2.1. Криволінійні інтеграли 1-го та 2-го роду, їх застосування

Обчислення криволінійних інтегралів

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{3y-x}$, де L – відрізок прямої $y = x + 2$ між точками перетину з осями координат.

Розв'язування.

Якщо крива задана в прямокутній системі координат [1] рівнянням $y = \varphi(x),\ a \le x \le b$, функція $y = \varphi(x)$ є неперервною на вказаному відрізку разом із похідною $\varphi'(x)$, то криволінійний інтеграл 1-го роду зводиться до визначеного інтеграла

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}dx. \tag{1}$$

Пряма перетинає осі координат в точках $A(-2;0)$ та $B(0;2)$, тому $-2 \le x \le 0$. Згідно з формулою (1) матимемо

$$\int\limits_L \frac{dl}{3y-x} = \int\limits_{-2}^{0} \frac{\sqrt{1+1^2}dx}{3x+6-x} = \int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{2x+5} == \frac{1}{2}\ln|2x+5|\Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{2}\left(\ln 5 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 5.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$ вздовж дуги L, де L – перша арка циклоїди $x = a\left(t - \sin t\right),\ y = a\left(1 - \cos t\right)$.

Р озв'язування.

У разі задання кривої AB параметричними рівняннями $x = x(t),\ \ y = y(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$, за умови неперервності функцій $x = x(t), y = y(t)$ разом із похідними криволінійний інтеграл 1-го роду обчислюється за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt. \tag{2}$$

Зауваження. Справедлива аналогічна формула [6] обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду і для параметричного задання просторової кривої $x = x(t),\ \ y = y(t), z = z(t)\ \ (t_0 \le t \le t_1)$

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt. \qquad (3)$$

Знайдемо похідні, що входять до запису диференціала дуги формули (2)

$$x_t' = a\left(1-\cos t\right),\ \ y_t' = a\sin t,$$

тоді

$$dl = \sqrt{a^2\left(1-\cos t\right)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{2\left(1-\cos t\right)}dt.$$

За формулою (2) матимемо

$$\int\limits_L \sqrt{2y}dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2a\left(1-\cos t\right)}\cdot a\sqrt{2\left(1-\cos t\right)}dt = 2a\sqrt{a}\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)dt =$$

$$= 2a\sqrt{a}\left(t-\sin t\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi a\sqrt{a}.$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де L:

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi.$$

Розв'язування. Маємо задану гвинтову лінію (рис.1), тому використовуємо формулу (3).

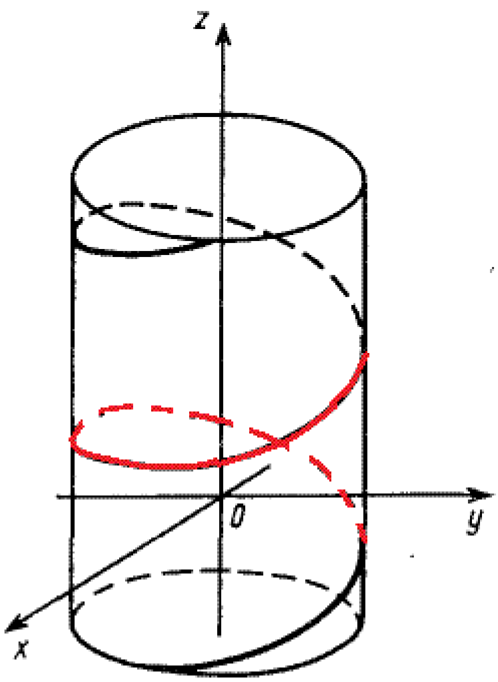

Рис.1. Гвинтова лінія.

Частинні похідні $x' = -a\sin t,\ y' = a\cos t,\ z' = b$, тому

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}dt,$$

$$\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2}} = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{a^2+b^2t^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{b}\ln\left|bt + \sqrt{a^2+b^2t^2}\right|\Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln\left|\frac{2\pi b + \sqrt{a^2+b^2(2\pi)^2}}{a}\right|.$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (x-y)dl$, де $L-$коло $x^2+y^2=2x$.

Розв'язування.

Якщо крива $\widehat{AB}$ задана рівнянням в полярній системі координат

$$\rho = \rho(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,$$

де функція $\rho = \rho(\varphi)$ і її похідна $\rho'(\varphi)$ – неперервні на вказаному відрізку, то криволінійний інтеграл 1-го роду обчислюють за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (4)$$

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$. Рівняння кривої L набуває вигляду $\rho=2\cos\varphi,$ де $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Для обчислення інтеграла застосуємо формулу (4). Оскільки $\rho'=-2\sin\varphi$, то

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=\sqrt{4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}\,d\varphi=2d\varphi;$$

$$\int\limits_L (x-y)\,dl = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)2d\varphi = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi + 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d(\cos\varphi)=$$

$$=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)d\varphi+4\cdot\left.\frac{\cos^2\varphi}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\cdot\left.\left(\varphi+\frac{\sin2\varphi}{2}\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi.$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx+x^2dy$, де $L-$ відрізок прямої від точки $A(1;1)$ до точки $B(2,3)$.

Розв'язування.

Якщо плоска крива $\widehat{AB}$ задана явним рівнянням $y=\varphi(x), a\le x\le b$, де $\varphi(x)-$ неперервно-диференційовна функція на проміжку $[a,b]$, тоді формула обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду має вигляд

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\big(P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big)dx. \qquad (5)$$

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B (як рівняння прямої, що проходить через дві вказані точки)

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2};\quad 2x-2=y-1;\quad y=2x-1.$$

Тоді $dy=2dx$. Скористаємось формулою (5):

$$\int_L ydx + x^2dy = \int_1^2 \left(2x - 1 + 2x^2\right) dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - x + 2 \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 4 - 2 + \frac{16}{3} - 1 + 1 - \frac{2}{3} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_L (x+y)dx - xdy$ вздовж ламаної OBA, де $O(0;0)$, $A(4;2)$ і $B(2;0)$.

Розв'язування.

Вздовж ламаної OBA на ділянці OB маємо $y=0$ і $dy=0, 0 \le x \le 2,$ на ділянці BA: $y = x-2, dy = dx, 2 \le x \le 4.$ Тому, згідно з формулою (5), маємо:

$$\int_L (x+y)dx - xdy = \int_{OB} (x+y)dx - xdy + \int_{BA} (x+y)dx - xdy =$$

$$= \int_0^2 xdx + \int_2^4 (x + x - 2 - x)dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^4 = 2 + 2 = 4.$$

Приклад 7. Знайти криволінійний інтеграл другого роду $\int_L ydx - xdy$, де L– еліпс, заданий параметричними рівняннями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ за додатним напрямом обходу.

Розв'язування.

Якщо функції $x(t)$, $y(t)$ та їх похідні першого порядку $x'(t)$, $y'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha, \beta]\big(x(\alpha) = y(\alpha) = a, x(\beta) = y(\beta) = b\big),$ а функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні вздовж даної кривої, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)dt \tag{6}$$

Згідно з формулою (6) маємо

$$\int_L ydx - xdy = \int_0^{2\pi} \big(b\sin t \cdot (-a\sin t) - a\cos t \cdot b\cos t\big)dt =$$

$$= -ab\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = -ab\int_0^{2\pi} dt = -2\pi ab.$$

Приклад 8. Обчислити $\int\limits_L ydx - zdy + (x+y)dz$, якщо крива є гвинтовою лінією L: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi.$

Розв'язування.

Обчислюють криволінійний інтеграл 2-го роду від неперервних функцій [6] трьох змінних $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вздовж параметрично заданої кривої $\widehat{AB}$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta,$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, а також їх похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha, \beta]$:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big) y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big) z'(t) \Big) dt. \tag{7}$$

Для гвинтової лінії (рис.1) маємо $x' = -a\sin t, y' = a\cos t, z' = b$, тому за формулою (7)

$$\int\limits_L ydx - zdy + (x+y)dz = \int\limits_0^{2\pi} \Big(a\sin t \cdot (-a\sin t) - bt \cdot a\cos t + \big(a\cos t + a\sin t\big) b \Big) dt =$$

$$= -a \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t dt - ab \int\limits_0^{2\pi} t\cos t dt + ab \int\limits_0^{2\pi} (\cos t + \sin t) dt =$$

$$= -\frac{a}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt - ab \left| \begin{matrix} u = t, du = dt \\ dv = \cos t dt \\ v = \sin t \end{matrix} \right| + ab(\sin t - \cos t)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{a}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} - ab\left(t\sin t\Big|_0^{2t} - \int\limits_0^{2\pi} \sin t dt \right) - ab(\sin 2\pi - \sin 0 - \cos 2\pi + \cos 0) =$$

$$= -\frac{a}{2}\left(2\pi - \frac{1}{2}\sin 4\pi + \frac{1}{2}\sin 0 \right) - ab(2\pi \sin 2\pi + \cos 2\pi - \cos 0) = -a\pi.$$

Застосування криволінійних інтегралів

Приклад 1. Визначити роботу сили $\vec{F}=(2y+x)\vec{i}+\left(y+x^2\right)\vec{j},$ якщо вона переміщує точку-початок координат $O(0,0)$ в точку $B(2,10)$ вздовж дуги кривої $y=x^2+3x.$

Розв'яування.

Якщо $\vec{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ – силове векторне поле, то криволінійний інтеграл другого роду має фізичний зміст: робота цього поля при переміщенні матеріальної точки по кривій L задається формулою

$$A=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \tag{8}$$

Згідно з формулою (8) маємо

$$A=\int_L (2y+x)dx+\left(y+x^2\right)dy=\int_0^2\left[\left(2x^2+6x+x\right)+\left(x^2+3x+x^2\right)(2x+3)\right]dx=$$

$$=\int_0^2\left(4x^3+14x^2+16x\right)dx=\left.\left(x^4+\frac{14x^3}{3}+8x^2\right)\right|_0^2=\frac{256}{3}.$$

Приклад 2. Знайти довжину дуги кривої $x=4-\dfrac{t^4}{4},\;\; y=\dfrac{t^6}{6}$ між точками її перетину з осями координат.

Розв'язування.

Якщо у площині XOY задано кусково-гладку криву $\widehat{AB}$, на якій визначено неперервну функцію $f(x,y)$, причому $f(x,y)=1$, тоді довжину L кривої $\widehat{AB}$ визначають за формулою

$$L=\int_{AB} dl. \tag{9}$$

Скористаємось формулою (9). Спочатку знайдемо диференціал дуги для параметрично заданої кривої

$$dl=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt=\sqrt{t^6+t^{10}}=t^3\sqrt{1+t^4}dt.$$

та межі параметра *t:*

$$x = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt[4]{16} = 2; \;\; y = 0, t_0 = 0.$$

Тоді

$$L = \int\limits_L dl = \int\limits_0^2 t^3\sqrt{1+t^4}dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 \sqrt{1+t^4}d\left(1+t^4\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1+t^4\right)^{3/2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+2^4\right)\sqrt{1+2^4} - \frac{1}{6} = \frac{17\sqrt{17}-1}{6}.$$

Приклад 3. Обчислити [3] координати центра мас частини астроїди $x = a\cos^3 t,\; y = a\sin^3 t,$ яка знаходиться в першій чверті та моменти інерції відносно координатних осей. Густину кривої вважати рівною 1.

Розв'язування.

Для астроїди (рис. 2) за умовою маємо $0 \le t \le \pi/2$.

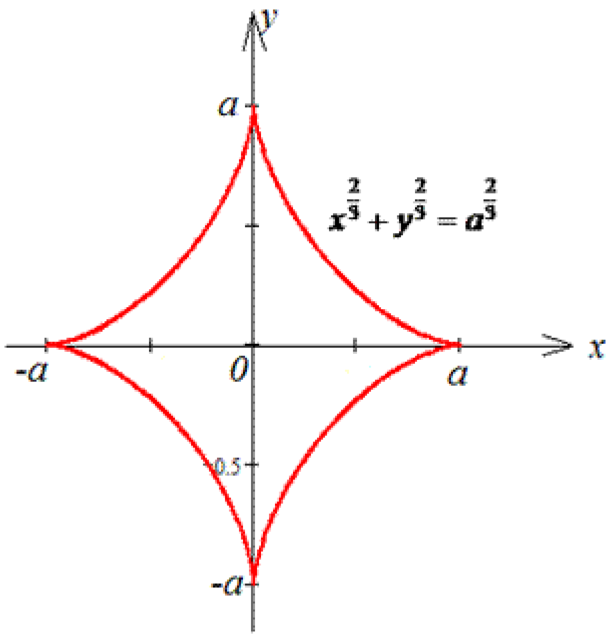

Рис. 2. Астроїда.

1) Обчислення координат центра мас.

Нехай $\left(x_0, y_0\right)$ – координати центра мас плоскої кривої L,– маса цієї кривої, $\gamma\left(x, y\right)$ – лінійна густина, тоді

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L x\gamma\left(x,y\right)dl, \;\; y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L y\gamma\left(x,y\right)dl. \tag{10}$$

де числове значення маси кривої L дорівнює інтегралові

$$m = \int_{L} \gamma(x, y)\, dl. \qquad (11)$$

Використаємо формули (10), (11), в яких покладемо $\gamma(x, y) = 1.$

Оскільки $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,$ тоді $x' = -3a\cos^2 t\sin t,\ y = 3a\sin^2 t\cos t,$ відповідно,

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 3a\cos t\sin t dt.$$

Тоді маса за формулою (11) дорівнює

$$m = \int_{L} dl = 3a\int_{0}^{\pi/2} \cos t\sin t dt = 3a\int_{0}^{\pi/2} \sin t d(\sin t) = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{3a}{2}.$$

За формулою (10) обчислимо

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_{L} x dl = \frac{2}{3a}\int_{0}^{\pi/2} a\cos^3 t\cdot 3a\cos t\sin t dt = 2a\int_{0}^{\pi/2} \cos^4 t\sin t dt = -2a\int_{0}^{\pi/2} \cos^4 t d(\cos t) =$$

$$= -\frac{2a}{5}\cos^5 t\Big|_{0}^{\pi/2} = -\frac{2a}{5}(0-1) = \frac{2a}{5}.$$

Аналогічно,

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_{L} y dl = \frac{2}{3a}\int_{0}^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot 3a\cos t\sin t dt = 2a\int_{0}^{\pi/2} \sin^4 t\cos t dt = \frac{2a}{5}\sin^5 t\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{2a}{5}.$$

Отже, $M_0(x_0, y_0) = \left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right) -$ центр маси чверті астроїди.

2) Обчислення моментів інерції.

Якщо I_x, I_y – моменти інерції кривої L щодо координатних осей OX, OY, тоді

$$I_x = \int_{L} y^2\gamma(x, y)\, dl,\ \ I_y = \int_{L} x^2\gamma(x, y)\, dl. \qquad (12)$$

Обчислюємо $I_x = \int_{L} y^2 dl = \int_{0}^{\pi/2} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos t\sin t dt = 3a^3\int_{0}^{\pi/2} \sin^7 t d(\sin t) = \frac{3a^3}{8},$

аналогічно $I_y = \int\limits_L x^2 dl = \dfrac{3a^3}{8}.$

Приклад 4. Обчислити за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L \left(1 - x^2\right) ydx + \left(1 + y^2\right) xdy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язування. Розглянемо [4] на площині деяку область D, обмежену контуром L. Для замкненого контуру L справедлива формула Гріна

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L P\left(x, y\right) dx + Q\left(x, y\right) dy, \qquad (13)$$

де символом $\iint\limits_D$ позначено подвійний інтеграл по області D, а символом $\oint\limits_L$ – криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, який обходять у додатному напрямку.

Оскільки за умовою контур L замкнений, то скористаємось формулою Гріна (13)

$$P\left(x, y\right) = \left(1 - x^2\right) y,\ Q\left(x, y\right) = \left(1 + y^2\right) x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Отже,

$$\oint\limits_L \left(1 - x^2\right) ydx + \left(1 + y^2\right) xdy = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$

де область D – круг, обмежений контуром L.

Введемо полярні координати $x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi$ і перейдемо від подвійного інтеграла до повторного. Тоді

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Приклад 5. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t,\ y = b\sin t.$

Розв'язування.

Згідно з наслідком формули Гріна

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx, \qquad (14)$$

де S − площа плоскої фігури, обмеженої замкненою кривою L.

Маємо

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t + b\sin t\cdot a\sin t\right)dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt = \pi ab.$$

Приклад 6. Переконатись, що інтеграл $\int_{AB}\left(6xy^2+4x^3\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy$ не залежить від шляху інтегрування та обчислити його вздовж відрізка прямої від точки $A(2,3)$ до точки $B(3,4)$.

Розв'язування.

Якщо вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ у деякій області, що містить криву $L=AB$, тобто виконується рівність $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$, то інтеграл

$$\int_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(B)-u(A) \tag{15}$$

не залежить від вибору форми шляху з точки A до точки B.

Необхідною і достатньою умовою незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування є рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{16}$$

Якщо справедлива умова (16), то функцію $u(x,y)$ можна знайти, наприклад, так:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C. \tag{17}$$

Перевіримо умову (16):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy.$$

Отже, цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Запишемо тепер рівняння прямої, що проходить через точки $A(2,3)$ та $B(3,4)$. Матимемо

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-3}{4-3},\ \text{або}\ y=x+1,$$

водночас $dx=dy$. Тоді

$$\int\limits_{AB}\left(6xy^2+4x^3\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy=\int\limits_2^3\left(6x\left(x+1\right)^2+4x^36x^2\left(x+1\right)+3\left(x+1\right)^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_2^3\left(16x^3+21x^2+12x+3\right)dx=426.$$

Зауваження. У випадку незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування, його зручно обчислювати (рис. 3) вздовж ламаних [5], які паралельні до координатних осей.

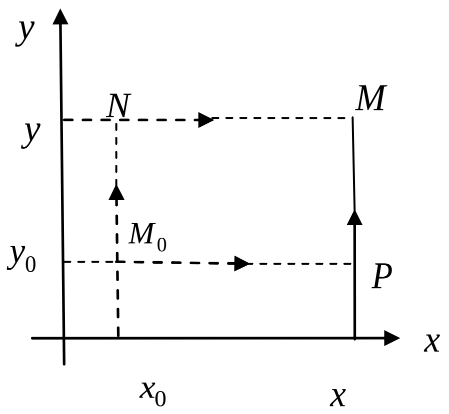

Рис. 3. Інтегрування вздовж ламаних.

В даному прикладі зручніше обрати шлях інтегрування $ACB,$ взявши точку $C(3,3)$. Тоді

$$AC: y=3, dy=0;\ 2\le x\le 3;\ CB: x=3, dx=0;\ 3\le y\le 4.$$

За властивістю адитивності стосовно кривої маємо

$$\int\limits_{AB}\left(6xy^2+4x^3\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy=\int\limits_{AC}\left(6xy^2+4x^3\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy+$$

$$+\int\limits_{CB}\left(6xy^2+4x^3\right)dx+\left(6x^2y+3y^2\right)dy=\int\limits_2^3\left(54x+4x^3\right)dx+\int\limits_3^4\left(54y+3y^2\right)dy=426.$$

Приклад 7. Переконатись, що вираз $\left(e^{xy}+5\right)\left(xdy+ydx\right)$ є повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y)$ та знайти цю функцію.

Розв'язування. Запишемо даний вираз у вигляді

$$\left(e^{xy}+5\right)\cdot ydx+\left(e^{xy}+5\right)\cdot xdy$$

та перевіримо умову (16).

Отже, $P(x,y)=\left(e^{xy}+5\right)\cdot y;\quad Q(x,y)=\left(e^{xy}+5\right)\cdot x$, тому

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=e^{xy}xy+e^{xy}+5=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

заданий вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Обчислимо її за формулою (17), взявши точку $\left(x_0,y_0\right)$ за початок координат, а саме

$$u\left(x,y\right)=\int_0^x P\left(x,0\right)dx+\int_0^y Q\left(x,y\right)dy+C=\int_0^y\left(e^{xy}x+5x\right)dy+C=\left(e^{xy}+5xy\right)\Big|_0^y+C.$$

Отже, $u(x,y)=e^{xy}+5xy-1+C$.

Перевіримо вірність результату, тобто обчислимо повний диференціал отриманої функції

$$du(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy=\left(e^{xy}y+5y\right)dx+\left(e^{xy}x+5x\right)dy.$$

1.2.2. Обчислення характеристик скалярного та векторного полів

Приклад 1. Задана функція $u(M)=x^2+2y^2+3z^2-xyz$ і точки $M_1(1,-1,2),\ \ M_2(-5,1,4)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) найбільшу швидкість зростання функції в точці M_1.

Розв'язування.

1) Для диференційованої функції $u = f(x, y, z)$, точки $M(x, y, z)$, вектора $\vec{S}\left\{S_x, S_y, S_z\right\}$, проведеного з точки M, напрямні косинуси якого $\cos\alpha = \frac{S_x}{\left|\vec{S}\right|}, \cos\beta = \frac{S_y}{\left|\vec{S}\right|}, \cos\gamma = \frac{S_z}{\left|\vec{S}\right|}$, похідна від функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{S}$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{S}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{18}$$

Обчислюємо згідно із формулою (18). Спочатку знаходимо координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (-6; 2; 2)$, його довжину $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{36+4+4} = 2\sqrt{11}$ та напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{-6}{2\sqrt{11}} = -\frac{3}{\sqrt{11}}; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{11}}; \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Частинні похідні за змінними:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - yz, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = 2 + 2 = 4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y - xz, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = -4 - 2 = -6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - xy, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = 12 + 1 = 13.$$

Отже,

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} \cdot \cos\gamma =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{11}}\right) - 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} + 13 \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} = -\frac{5}{\sqrt{11}}.$$

2) Найбільша швидкість зростання функції в точці дорівнює модулю вектора градієнта $\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{S}}\right)_{найб} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}u\right|_A$, який для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ визначається формулою

$$\overrightarrow{\text{grad}}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Із проведених обчислень маємо $\overrightarrow{\text{grad}}u(M_1) = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 13\vec{k}$, тому

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{S}}\right)_{найб} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}u\right|_A = \sqrt{16+36+169} = \sqrt{221}.$$

Приклад 2. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = 3x^2\vec{i} + 2(x+y)\vec{j} + (y-2z)\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

Розв'язування.

1) Соленоїдальність векторного поля.

За означенням дивергенція векторного поля

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

обчислюється за формулою

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad (19)$$

причому векторне поле $\vec{a}$ називається *соленоїдальним* (або *трубчатим*), якщо його дивергенція дорівнює нулю.

За умовою задачі $P = 3x^2, Q = 2(x+y), R = y - 2z.$ Тоді за формулою (19)

$$div\,\vec{a} = 6x + 2 - 2 = 6x \neq 0,$$

поле не є соленоїдальним.

2) Потенціальність векторного поля.

Для визначення потенціальності поля [5] достатньо пересвідчитись, щоб його ротор дорівнював нулю, де за означенням *ротор* (або *вихор*) векторного поля має вигляд

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ Q & R\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & R\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}. \tag{20}$$

Обчислюємо ротор векторного поля за формулою (20)

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2 & 2x+2y & y-2z\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x+2y & y-2z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2 & y-2z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ 3x^2 & 2x+2y\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(1-0)-\vec{j}(0-0)+\vec{k}(2-0)=\vec{i}+2\vec{k},$$

поле не є потенціальним.

Приклад 3. Для векторного поля $\vec{a}=\left(2x+4z^2\right)\vec{i}+\cos y\vec{j}+\left(z^2+8xz\right)\vec{k}$ переконатись у його потенціальності та знайти потенціал.

Розв'язування.

За формулою (20) обчислюємо ротор

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x+4z^2 & \cos y & z^2+8xz\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}-\left(8z-8z\right)\vec{j}+0\cdot\vec{k}=0.$$

Поле вектора $\vec{a}$ потенціальне, тобто існує функція $u=u(x,y,z)$, для якої $\overrightarrow{\operatorname{grad}u}=\vec{a}$. Для потенціального поля криволінійний інтеграл 2-го роду не залежить від шляху інтегрування між двома фіксованими точками – початком і кінцем шляху, при цьому

$$u(M)=\int_{M_0}^{M}\vec{a}\cdot d\vec{l}+C.$$

Шлях інтегрування обирають таким, щоб інтеграли на окремих ланках легко обчислювались, тобто зручно скористатись ламаною $M_0M_1M_2M$, де точки мають такі координати: $M_0(0,0,0), M_1(x,0,0), M_2(x,y,0), M(x,y,z).$

Має місце формула для знаходження функції трьох змінних за її повним диференціалом $du=Pdx+Qdy+Rdz$

$$u(x,\,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz.$$

Тоді

$$u(M)=\int_0^x 2tdt+\int_0^y \cos tdt+\int_0^z\left(t^2+8xt\right)dt+C=x^2+\sin y+\frac{z^3}{3}+4xz^2+C.$$

Зауваження. Для перевірки розв'язку знаходимо ґрадієнт отриманої функції

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\left(2x+4z^2\right)\vec{i}+\cos y\vec{j}+\left(z^2+8xz\right)\vec{k}.$$

Приклад 4. Обчислити лінійний інтеграл (циркуляцію) векторного поля $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+(x+y-1)\vec{k}$ по відрізку прямої, який з'єднує точки $A(1;1;1)$ та $B(2;3;4)$.

Розв'язування.

Криволінійний інтеграл по замкненому контуру L ($L-$ замкнена гладка крива в області D)

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

називають *циркуляцією* векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ вздовж кривої L і позначають

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\oint_L \vec{a}\,d\vec{r}, \qquad (21)$$

де $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Зауваження. Вимога замкнености конура не є обов'язковою, циркуляцію можна обчислювати по гладкій, кусково-гладкій кривій.

Криволінійний інтеграл обчислимо за формулою (7). Запишемо рівняння лінії L, тобто прямої AB: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ і перейдемо до її параметричного запису: $\begin{cases} x = t+1, \\ y = 2t+1, \\ z = 3t+1. \end{cases}$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, тобто $0 \le t \le 1$. Обчислюємо $dx = dt, dy = 2dt, dz = 3dt,$ тоді

$$\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz =$$

$$= \int_0^1 \left[t+1+(2t+1)\cdot 2 + (t+1+2t+1-1)\cdot 3 \right] dt = \int_0^1 (14t+6)dt = 14\cdot\frac{t^2}{2} + 6z)\Big|_0^1 = 13.$$

Приклад 5. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} - yz\vec{j} + x^2 z\vec{k}$ в точці $M_0(-3,1,-1)$.

Розв'язування.

Найбільша щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)$ в даній точці M_0 досягається в напрямку вектора ротора і чисельно дорівнює $\left|\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)\right|$.

Обчислюємо за формулою (20) ротор

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -yz & x^2 z \end{vmatrix} = \vec{i}(0+y) - \vec{j}(2zx-0) + \vec{k}(0-0) = y\vec{i} - 2xz\vec{j}.$$

Тоді $\operatorname{rot}\vec{a}(M_0) = \vec{i} - 6\vec{j}$, відповідно, найбільша щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)$ в заданій точці дорівнює $\left|\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)\right| = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}.$

1.2.3. Обчислення поверхневих інтегралів 1-го та 2-го роду. Формули Остроградського-Гаусса та Стокса

Приклад 1. Обчислити $I\iint\limits_S \left(y+z+\sqrt{a^2-x^2}\right)dS,$ де $S-$частина поверхні циліндра $x^2+y^2=a^2$, обмежена площинами $z=0$ та $z=h$.

Розв'язування.

Для [4] функції $f(x,y,z)$, неперервної на гладкій поверхні S, яка задається рівнянням $z=z(x,y)$, функції $z(x,y)$, $z_x'(x,y)$ та $z_y{}'(x,y)$ неперервні в замкненій області D_{xy} (проекція поверхні на площину XOY) справедлива формула

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy, \qquad (22)$$

яка виражає поверхневий інтеграл першого роду через подвійний інтеграл по проекції поверхні σ на площину XOY.

Для всієї поверхні не можна виразити одну із координат однозначною функцією від інших координат. Частини циліндричної поверхні, розміщені з різних сторін від вертикальних координатних площин (рис.3) мають явні різні рівняння $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, тому даний інтеграл по поверхні обчислимо як

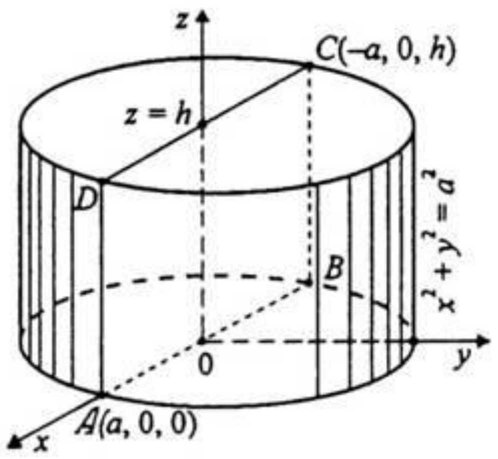

Рис. 4. Вигляд циліндра.

суму інтегралів I_1, I_2 за її складовими S_1, S_2. Використовуємо формулу (22), розуміючи заданою поверхню рівнянням $y = y(x,z)$. Тоді

$$dS = \sqrt{1 + \left(y_x'\right)^2 + \left(y_z'\right)^2}\,dxdz = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dxdz.$$

Відповідно, $I = I_1 + I_2 = a\iint\limits_{D_{xz}} \frac{zdxdz}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a\iint\limits_{D_{xz}} \left(2 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dxdz =$

$$= 2a\iint\limits_{ABCD} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dxdz = 2a\int_0^h dz\int_{-a}^{a}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx =$$

$$= 2a\int_0^h \left(x + z\arcsin\frac{x}{a}\Bigg|_{x=-a}^{x=a}\right)dz = 2a\int_0^h \left(2a + \pi z\right)dz = 2a\left(2az + \frac{\pi z^2}{2}\right)\Bigg|_0^h = ah\left(4a + \pi h\right).$$

Тут прямокутник $ABCD$ є спільною проекцією поверхонь S_1, S_2 на площину XOZ.

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S, де S – частина площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint\limits_S \left(3x - 2y + 6z\right)dS, \quad (p): 2x + 2y + z - 6 = 0.$

Розв'язування.

Використовуємо формулу (22), тому виражаємо

$$z = 6 - \left(2x + 2y\right),\ z_x' = -2,\ z_y' = -2,\ ds = \sqrt{1 + \left(-2\right)^2 + \left(-2\right)^2}\,dxdy = 3dxdy.$$

Зобразимо поверхню, записавши площину у відрізках:

$$2x + 2y + z = 6 \Rightarrow \frac{2x}{6} + \frac{2y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1,$$

тобто точки $A\left(3,0,0\right), B\left(0,3,0\right), C\left(0,0,6\right)$, які належать осям координат, також належать площині (рис. 5 а). Поклавши $z = 0$, на площині XOY маємо область

OAB інтегрування для подвійного інтеграла (рис. 5 б), для якої $0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 3 - x.$

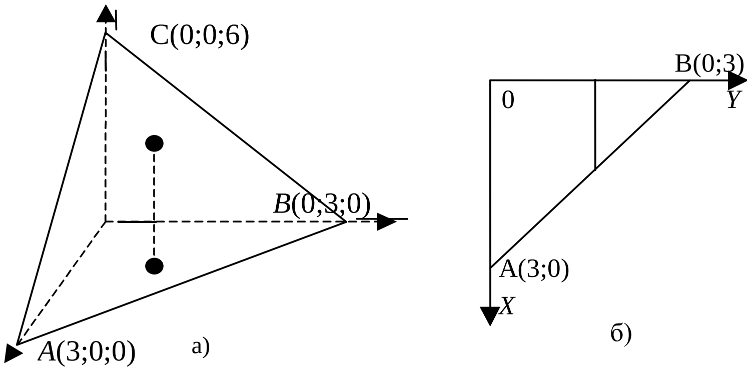

Рис. 5 а), б). Площина в просторі та її проекція на XOY.

Маємо

$$\iint_S (3x - 2y + 6z)dS = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (3x - 2y + 36 - 12x - 12y)3dy =$$

$$= 3\int_0^3 dx \int_0^{3-x} (36 - 9x - 14y)dy = 3\int_0^3 \left(36(3-x) - 9x(3-x) - 7(3-x)^2\right)dx =$$

$$= 3\int_0^3 \left(108 - 63x + 9x^2 - 7(3-x)^2\right)dx = 3\left(108x - 63\cdot\frac{x^2}{2} + 3x^3 + \frac{7}{3}(3-x)^3\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= 3\left(108\cdot 3 - 63\cdot\frac{9}{2} + 3\cdot 27\right) - 7\cdot 27 = \frac{351}{2}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_S \left(y^2 + z^2\right)dxdy$, де $S -$ верхня сторона поверхні $z = \sqrt{1 - x^2}$, що відтинається площинами $y = 0, y = 1.$

Розв'язування.

Для орієнтовної поверхні S, заданої рівнянням

$$z = f(x, y), (x, y) \in D_{xy} \subset \mathbb{R}^2,$$

де $R(x, y, z) -$ неперервна функція на даній поверхні, нормаль до поверхні утворює гострий (тупий) кут з віссю OZ справедлива формула

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y))dxdy, \qquad (23)$$

де знак «плюс» («мінус») береться, коли нормаль до поверхні σ утворює гострий (тупий) кут з віссю OZ.

Проекцією поверхні на площину XOY є прямокутник: $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ (рис. 6).

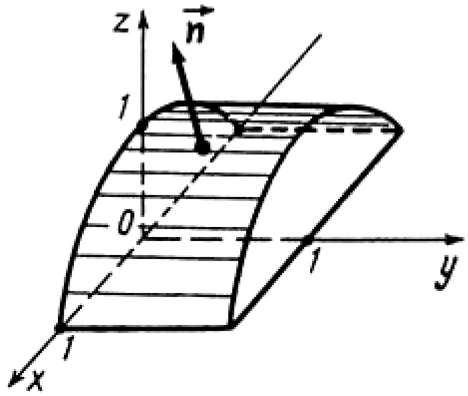

Рис. 6. Вигляд орієнтовної поверхні.

Враховуючи, що нормаль $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю OZ, за формулою (23) маємо

$$\iint\limits_{S}\left(y^2+z^2\right)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\left(y^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{1}\left(y^2+1-x^2\right)dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{y^3}{3}+y-x^2y\right)\Bigg|_0^1 dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx=\left(\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2\left(\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=2.$$

Приклад 4. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=x\vec{i}+\vec{j}+xz^2\vec{k}$ через поверхню $x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0.$

Розв'язування.

Фізичний зміст [5] поверхневого інтеграла другого роду. Нехай

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k}$$

є швидкість рідини або газу, що протікає через обрану сторону поверхні S. Тоді об’єм потоку рідини або газу, що протікає за одиницю часу через поверхню S, знаходять за формулою

$$\prod = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS, \qquad (24)$$

де $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + cos\beta\,\vec{j} + cos\gamma\vec{k}$ − одиничний нормальний вектор, формула (24) задає поверхневий інтеграл другого роду.

Поверхня являє собою частину сфери, розміщену в першому октанті (рис. 7). Позначимо її проекції на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz}, D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса 1.

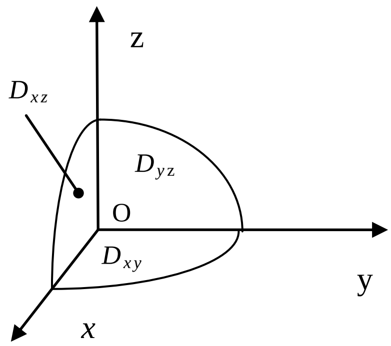

Рис. 7. Сфера в просторі.

Тоді

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_S x\,dydz + dxdz + x\,z^2dxdy =$$

$$= \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}dydz + \iint_{D_{xz}} dxdz + \iint_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right)dxdz = I_1 + I_2 + I_3\,.$$

Обчислимо окремо кожний з інтегралів.

$$I_1 = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}dydz = \begin{vmatrix} y=\rho\,\cos\varphi \\ z=\rho\,\sin\varphi \\ y^2+z^2=\rho^2 \\ dydz=\rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1\right) = \frac{\pi}{6};$$

$I_2 = \iint_{D_{xz}} dxdz = \dfrac{1}{4}\pi,$ (це просто площа чверті круга),

$$I_3=\iint\limits_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ x^2+y^2=\rho^2 \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{array}\right|=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\rho\, d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right)d\rho\right]\cos\varphi d\varphi==\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{1}{3}\rho^3-\frac{1}{5}\rho^5\right)\Bigg|_0^1\right]\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{2}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=\frac{2}{15}\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{15}.$$

Отже, $I=I_1+I_2+I_3=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{2}{15}=\frac{5\pi}{12}+\frac{2}{15}$.

Якщо поверхня замкнена, додатним напрямком нормалі до поверхні прийнято вважати зовнішню нормаль.

Приклад 5. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди за формулою Остроградського-Гаусса, якщо

$$\vec{a}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k},\ (p):\quad 2x+2y+z=6.$$

Розв'язування.

Теорема. *Нехай правильна замкнена область* G *обмежена гладкою або кусково-гладкою поверхнею* S, *а функції* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – *неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в даній області. Тоді має місце така формула:*

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint\limits_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \qquad (25)$$

(інтегрування проводиться по її зовнішній стороні), яка називається ***формулою Остроградського-Гаусса***.

Обчислюємо дивергенцію

$$div\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3+1+4+8,$$

тоді

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint\limits_S (3x-1)dydz+(y-z+1)dxdz+4zdxdy=8\iiint\limits_G dxdydz,$$

тобто маємо 8 об’ємів піраміди (рис. 5а)), обмеженої координатними площинами і площиною $2x+2y+z-6=0$. За відомою формулою $V_{пір.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H$, площа основи є площею прямокутного трикутника *AOB*, $S=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}$, а висотою $H=OC=6$. Отже, $V_{пір.}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot 6=9$, відповідно,

$$\iint\limits_S (3x-1)dydz+(y-z+1)dxdz+4zdxdy=8\iiint\limits_G dxdydz=8\cdot 9=72.$$

Зауваження. Інтеграл $\iiint\limits_G dxdydz$ можна обчислити, як потрійний, звівши його до визначених інтегралів, а саме (межі змінювання див. рис. 5):

$$\iiint\limits_G dxdydz=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}dy\int_0^{6-2x-2y}dz=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(6-2x-2y)dy=$$

$$=\int_0^3\left(6y-2xy-y^2\right)\Big|_0^{3-x}dx=\int_0^3\left(18-6x-6x+2x^2+(3-x)^2\right)dx=$$

$$=\left(18x-6x^2+\frac{2x^3}{3}+\frac{(3-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=54-54+18-\frac{27}{3}=9.$$

Приклад 6. Застосовуючи формулу Стокса, обчислити

$$\oint\limits_L e^x dx+z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy+yz^3dz,$$

де $L-$замкнена лінія *OCBAO*, (рис. 8) перетину поверхонь

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, x=0, x=2, y=0, y=1.$$

Розв’язування.

За формулою Стокса

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] ds \qquad (26)$$

потрібно обчислити $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ за формулою (20) та перейти до обчислення поверхневого інтеграла 2-роду.

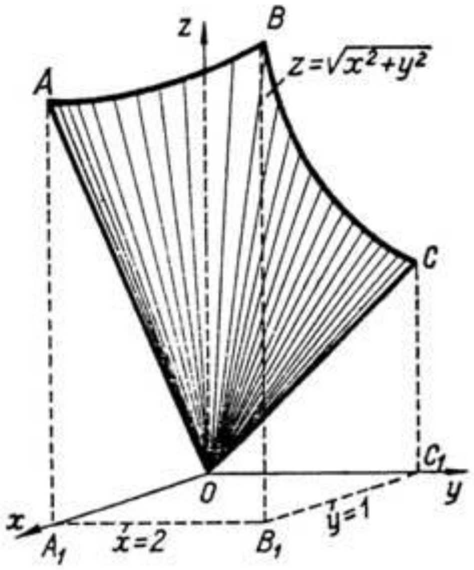

Рис. 8. Вигляд поверхні.

За умовою задачі $P(x,y,z) = e^x,\ Q(x,y,z) = z\left(x^2+y^2\right)^{3/2},\ R(x,y,z) = yz^3$, тоді

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x & z\left(x^2+y^2\right)^{3/2} & yz^3 \end{vmatrix} = \left(z^3 - \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\right)\vec{i} - (0-0)\vec{j} + \left(3xz\sqrt{x^2+y^2} - 0\right)\vec{k} =$$

$$= 3xz\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}.$$

За формулою (26) $I = 3\iint\limits_{S} xz\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$. Виберемо за S частину даної конічної поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, обмеженої контуром L. Тоді, інтегруючи по нижній частині вказаної поверхні та здійснюючи обхід контура L в напрямку, протилежному до заданого в умові, маємо

$$I = 3\iint\limits_{S} xz\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{S} x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= -3\iint\limits_{OA_1B_1C_1O} x\left(x^2+y^2\right)dxdy = -3\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2\left(x^3+xy^2\right)dx =$$

$$= -3\int\limits_0^1\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dy = -3\int\limits_0^1\left(4+2y^2\right)dy = -3\left(4y+\frac{2y^2}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -14.$$

Частина II

Теорія рядів

2. 1. Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n+3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n}{9n+4}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{9n^3+10n+7}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{9n^2+4}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+3)!}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(5n)!x^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\ln 1{,}22,\quad \alpha=0{,}0001$; б) $\cos 0{,}3,\quad \alpha=0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,1}e^{-6x^2}dx$ з точністю до $\alpha=0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y'=\arcsin y+x;\quad y(0)=\frac{1}{2},\quad k=4$.

7. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega=2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x-1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$, задану на відрізку $[-\pi,\pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x)=e^x$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 2

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sin\left(\pi/5\right)$, $\alpha=0{,}0001$; б) $\ln 2$, $\alpha=0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}dx$ з точністю до $\alpha=0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'=x^2y^2+y\sin x;\quad y(0)=\frac{1}{2},\quad k=3.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}2-2x/7, & -\pi\le x<0,\\ 0, \ 0\le x\le\pi, & \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi,\pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x)=3^x$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 3

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+4}{n+3}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{(n+1)(n+3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{3^n}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\ln^n(n+1)}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$, $\alpha=0{,}0001$; б) $\sin 10^\circ$, $\alpha=0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{2,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$ з точністю до $\alpha=0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y'=y\cos x+2\cos y$; $y(0)=0$, $k=4$.

7. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega=2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 7x+3, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi,\pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x)=5^{x/2}$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 4

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^n}{(2n)^{n+1}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{tg}\frac{1}{(n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{9n+4}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n x^{2n}}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$, $\alpha = 0{,}001$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,4}\sqrt{1-x^3}\,dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = x\sin x - y^2$; $y(0)=1$, $k=3$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}4x-10, & -\pi\le x<0,\\ 0, \; 0\le x\le\pi,\end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi,\pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-2)^2$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 5

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{7n^2+4}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{n+2}{n^2-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^5}{4^n}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^{n-1}}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sin\frac{\pi}{100}, \quad \alpha = 0{,}0001;$ б) $\sqrt[4]{90}, \quad \alpha = 0{,}001.$

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{x-\mathrm{arctg}x}{x^2}dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = xyy'; \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad k = 4.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 1 - 2x/5, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = (2x-1)^2$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 6

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2^n(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2}{3n^2+5}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^6+10}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^n\cdot 5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{tg}\frac{2}{n}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)^n}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{2n-1}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[10]{1080}, \quad \alpha = 0{,}001;$ б) $\frac{1}{e}, \quad \alpha = 0{,}0001.$

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $xy'' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad k = 4.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 3x - \frac{1}{4}, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = 6^{x/4}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 7

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{n^6 + 5}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^2}{1+7n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{n+1}}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\ln 10, \quad \alpha = 0{,}0001$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}, \quad \alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}\,dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = y + xe^y; \quad y(0) = 0, \quad k = 4.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 5x - 1, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos 2x, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$ задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 8

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+n}{1+n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n} \right)$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\dfrac{n}{3n+2} \right)^n$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[3]{e}$, $\alpha = 0{,}00001$; б) $\sqrt[3]{8{,}36}$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{x} \sin x dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = yy' - x^2$; $y(0) = y'(0) = 1$, $k = 3$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x - 2/3, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = e^{-2x/3}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 9

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^2} \right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(n+4)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{2^n}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n (n^2 + 1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\operatorname{arctg} 1/2$, $\alpha = 0{,}001$; б) $\sqrt[6]{738}$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = x^2 + y^3$; $y(1) = 1$, $k = 4$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} x - 3, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 10

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{arctg}\frac{n}{n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n^2}-1\right)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n^2+3}}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(4n+3)!}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[3]{80},\quad \alpha=0{,}001$; б) $\ln 5,\quad \alpha=0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1\cos\sqrt[3]{x}dx$ з точністю до $\alpha=0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y''=x\sin y'$; $y(1)=0,\quad y'(1)=\frac{\pi}{2},\quad k=4.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}2-x/3, & -\pi\le x<0,\\ 0, 0\le x\le\pi,\end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi,\pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x)=2^x$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 11

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n^2+9}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) e^2, $\alpha=0{,}001$; б) $\cos 2°$, $\alpha=0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до $\alpha=0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y''=xy^2-y'$; $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $k=4$.

7. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega=2\pi$) функцію**.**

$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 2x-3, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi,\pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x)=e^{-x}$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 12

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(\ln(n+5))^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+3}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{4+n^2-n}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4n}{5n+1}\right)^n$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\ln 3, \quad \alpha = 0{,}0001$; б) $\mathrm{ch}2, \quad \alpha = 0{,}0001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sin x^2 dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' - xy' - y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad k = 5.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 7x-1, & -\pi \le x < 0, \\ 0, \ 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = (x-1)^2$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 13

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{arctg} \frac{1}{2n-1} \right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+3)\ln^2(10n+3)}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{(n+1)^3}}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n-1)^2 \sqrt{3^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sin 1, \quad \alpha = 0{,}00001;$ б) $\sqrt{1{,}3}, \quad \alpha = 0{,}001.$

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x}dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001.$

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y' = xy + e^y; \quad y(0) = 0, \quad k = 4.$

7. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3 - 8x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x) = 3^{-x/2}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 14

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n^2-1}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[5]{34}, \quad \alpha = 0{,}001;$ б) $\ln 5/2, \quad \alpha = 0{,}001.$

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001.$

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y' = x^2 - y^2; \quad y(1) = 2, \quad k = 3.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & -\pi \le x < 0, \\ 0, 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = e^{2x}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 15

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+1}}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+2)}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[10]{1027}$, $\alpha = 0{,}001$; б) $\ln {}^{3}\!/_{2}$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{0,4} \sqrt{x} e^{-x/4} dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = x + x^2 + y^2$; $y(0) = 1$, $k = 3$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x/5 - 2, 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

2.8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = e^{3x}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 16

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\sqrt[3]{e},\quad \alpha=0,001$; б) $\cos 10^\circ,\quad \alpha=0,001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,5}\ln(1+x^2)dx$ з точністю до $\alpha=0,001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y'=e^x+y;\quad y(0)=4,\quad k=3.$

7. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega=2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi,\pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x)=(x+1)^2$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 17

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $\operatorname{arctg}\left(\pi/10\right),\quad \alpha = 0{,}001$; б) $\sqrt[3]{70},\quad \alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4}dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y' = xy + y^2;\quad y(0) = 0{,}1,\quad k = 3$.

7. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x) = 5^{-x}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 18

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{2\pi}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln(n+3)\right)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{36+n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^4}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{11^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $e^{1/2}$, $\alpha = 0,001$; б) $\sin 18°$, $\alpha = 0,001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_{0}^{0,25}\ln(1+\sqrt{x})dx$ з точністю до $\alpha = 0,001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y'' = e^y \sin y'$; $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=\frac{\pi}{2}$, $k=3$.

7. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x < 0,\\ 3x-1, & 0 \le x \le \pi,\end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x)=e^{-x/4}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 19

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n^2}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $e^{-1/5}$, $\alpha = 0{,}0001$; б) $\sqrt[3]{500}$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x} e^{-x} dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = \dfrac{1 - x^2}{y} + 1$; $y(0) = 1$, $k = 5$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ (\pi - x)/2, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = 3^{-x/2}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 20

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 + 3}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^{3n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5 + n}{25 + n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{2\pi}{3^n}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{x^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції.

а) $e^{1/6}$, $\alpha = 0{,}001$; б) $\sqrt[3]{127}$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x} \cos x dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = y\cos y' + x$; $\quad y(0)=1, \quad y'(0)=\dfrac{\pi}{3}, \quad k=3.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases} 5x+1, & -\pi \le x < 0, \\ 0, 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = \mathrm{sh}x,$ задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

2.2. Розв’язування типових прикладів

2.2.1. Збіжність числових рядів

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n+2)!}{n^3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{2n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+16}$; 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

Розв’язування.

1) Використовуємо ознаку порівняння в граничній [1] формі.

Друга ознака порівняння (в граничній формі). *Якщо існує скінченна та не рівна нулеві границя*

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_n/v_n\right)=k, \tag{1}$$

тоді два ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ *одночасно є збіжними або розбіжними*

Будуємо величину, еквівалентну u_n при $n\to\infty$:

$$u_n=\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}\sim\sqrt{\frac{n}{n^3}}=\frac{1}{n}=\upsilon_n.$$

Отже, як ряд порівняння вибираємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, він є розбіжним. Обчислюємо границю відношення $\frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+5)n^2}{n^3+10n+20}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{10}{n^2}+\frac{20}{n^3}}}=1\ (0<1<\infty).$$

За ознакою порівняння буде розбіжним і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$.

2) Для дослідження ряду на збіжність застосуємо ознаку Даламбера.

Ознака Даламбера. *Якщо для ряду з додатними членами* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує*

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_{n+1}/u_n\right) = D, \tag{2}$$

тоді ряд збіжний при $D<1$, *а при* $D>1$ *ряд розбігається.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}(n+3)!}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{7^n(n+2)!} = \lim_{n\to\infty}7\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\cdot\frac{(n+2)!\cdot(n+3)}{(n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}7\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\cdot(n+3) = \infty,$$

Значить, ряд розбігається.

3) Для дослідження ряду на збіжність застосуємо радикальну ознаку Коші

Ознака Коші. *Якщо для ряду з додатними членами* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = C, \tag{3}$$

тоді ряд збігається при $C<1$ *та розбігається при* $C>1$.

Загальний член ряду $u_n = \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{2n} > 0,$ отже, ряд знакододатний.

Визначимо границю за формулою (3)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5+\frac{1}{n}}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} < 1,$$

тому ряд збігається.

4) Для дослідження ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку Коші [1], [2].

Інтегральна ознака (Коші). *Якщо функція* $f(x)$ *визначена в проміжку* $1 \le x < +\infty$ *і при* $x \ge a \ge 1$ *неперервна, додатна і спадна, то для того щоб збігався числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots,$$

необхідно і достатньо, щоб збігався невласний інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x^2+16}$ – визначена, неперервна, монотонно спадна для $x \geq a \geq 1$, тому досліджуємо за ознакою невласний інтеграл 1-го роду

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2+16}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^2+16} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\Big|_1^b =$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) = Const.$$

Отже, інтеграл збігається, а, значить, збігається і числовий ряд.

5) Загальний член ряду

$$u_n = \frac{\ln n}{n} = f(n) > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Аналогічно прикладу 4) обчислимо інтеграл цієї функції

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b} \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_2^{b} \ln x \cdot d\ln x =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln^2 x\right)\Big|_2^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln^2 b - \ln^2 2\right) = +\infty.$$

Інтеграл розбіжний, отже, за інтегральною ознакою Коші, ряд теж розбіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність знакопереміжних рядів. У разі збіжності ряду дослідіть його на абсолютну та умовну збіжність.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3}{8n+7}\right)^n$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot 7^n}$; 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$.

Розв'язування.

Числовий ряд виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

де $u_n > 0 \; (n = 1, 2, 3, \cdots)$, називають ***знакопереміжним*** рядом.

Теорема (ознака Лейбніца). *Знакопереміжний ряд збіжний, якщо абсолютні величини його членів монотонно не зростають, а загальний член прямує до нуля, тобто:*

$$1) \; u_{n+1} \le u_n, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$2) \; \lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ збіжний, якщо є збіжним ряд із абсолютних величин

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

при цьому випадку початковий ряд називається ***абсолютно збіжним.*** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ називають ***умовно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, але виконуються умови ознаки Лейбніца.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$.

Загальний член ряду $u_n = \frac{\sin n}{n^3}$ залежно від n може бути як додатним, так і від'ємним. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ — знакозмінний. Побудуємо ряд із абсолютних величин його членів: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3}$. Цей ряд буде знакододатним $\left(|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^3} > 0 \right)$, так що для дослідження його на збіжність можна використати ознаки збіжності знакододатних рядів. Скористаємося ознакою порівняння рядів:

$$|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3} = v_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ збіжний, так як $\alpha = 3 > 1$. Отже, за ознакою порівняння ряд із абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}$ збігається, тому збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$, причому збігається абсолютно.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Із вигляду загального члена ряду $u_n = (-1)^n \operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$ бачимо, що цей ряд знакопереміжний.

Дослідимо збіжність ряду із абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Одержаний ряд знакододатний. Застосуємо до нього ознаку порівняння, порівняємо із розбіжним рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (враховуємо еквівалентність $\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, n \to \infty)$.

Обчислюємо границю відношення $\frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2 = Const.$$

Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$ — розбіжний, а отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}$ абсолютно збіжним не буде.

Оскільки досліджуваний ряд є знакопереміжним, то перевіримо для нього виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $u_n > u_{n+1} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} > \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ — виконується;

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ — виконується.

Отже, за ознакою Лейбніца даний ряд є збіжним, але його збіжність умовна.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3}{8n+7}\right)^{n}$.

Дослідимо ряд, що складений із абсолютних величин членів даного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8n+7}\right)^{n}.$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{8n+7}\right)^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{8n+7}=0<1$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8n+7}\right)^{n}$ збігається.

Значить, даний знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3}{8n+7}\right)^{n}$ збігається абсолютно.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot 7^{n}}$.

Дослідимо ряд, що складається із абсолютних величин членів даного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 7^{n}}$$

Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 7^{n}}{(2n+3)\cdot 7^{n+1}}=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{7}<1,$$

тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n}}$ збігається. Значить, даний знакопереміжний ряд збігається абсолютно.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$.

Ряд із абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n+5}$ розбіжний, оскільки не виконується необхідна умова збіжності

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n+5} = \frac{1}{6} \neq 0.$$

За ознакою Лейбніца теж 2-а умова не виконується (вона є такою, як необхідна умова). Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$ розбіжний.

2.2.2.Степеневі ряди, їх застосування

Приклад 1. Знайти області збіжності степеневих рядів.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n^2+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

Розв'язування.

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

де числа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ називають *коефіцієнтами* ряду.

Для дослідження степеневого ряду на збіжність [1] потрібно знайти його інтервал збіжності і з'ясувати збіжність цього ряду на кінцях його інтервалу збіжності. Для знаходження *радіуса збіжності* степеневого ряду (випливає із ознаки Даламбера) використовують формулу

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{4}$$

У випадку, коли існує $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, (випливає із радикальної Коші) застосовують формулу

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}, \tag{5}$$

Інтервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ називається *інтервалом збіжності*, а R – *радіусом збіжності* ряду. Якщо $R = 0$, то ряд збігається при $x = x_0$; якщо $R = +\infty$, то при всіх $x \in \mathbb{R}$.

Зауваження. Область збіжності часто досліджують за допомогою безпосереднього використання ознак.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}$.

Порівнюючи загальний член даного ряду $u_n(x)=\frac{nx^n}{5^n}$ із загальним членом стандартного степеневого ряду a_nx^n, встановлюємо, що даний ряд є степеневим із коефіцієнтом $a_n=\frac{n}{5^n}$.

Знаходимо радіус збіжності ряду (формула 4):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n5^{n+1}}{5^n(n+1)}=5\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=5,$$

$(-5;\ 5)$ — інтервал збіжності ряду.

На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=\pm5$, маємо розбіжні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, для яких, очевидно, не виконується необхідна умова збіжності. Отже, $x\in(-5;\ 5)$ є областю збіжності даного степеневого ряду.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n^2+1}$.

Для даного степеневого ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{4^n x^n}{n^2+1};\ u_{n+1}=\frac{4^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{4^n x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}4\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=4|x|.$$

Інтервал збіжності визначається нерівністю $4|x|<1$, звідси $|x|<\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$.

Дослідимо граничні точки цього інтервалу.

Для $x=\frac{1}{4}$ одержимо знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$. Для дослідження цього ряду на збіжність скористаємося інтегральною ознакою Коші, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ – визначена, неперервна, монотонно спадна для $x\geq a\geq 1$:

$$\int_{n=1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}x\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Інтеграл збігається, значить, збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, тому $x=\frac{1}{4}$ належить області збіжності.

Для $x=-\frac{1}{4}$ одержимо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$. Для його дослідження записуємо ряд із абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, який досліджено для точки $x=\frac{1}{4}$. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ є абсолютно збіжним, тому точка $x=-\frac{1}{4}$ теж належить області збіжності.

Таким чином, область збіжності ряду − відрізок $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$.

Цей ряд знакододатний. Отже, можна застосувати до нього ознаку Даламбера (при цьому x будемо вважати за деякий параметр):

$$|u_n(x)|=\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n};\ |u_{n+1}(x)|=\frac{\sqrt{n+1}}{|x-2|^{n+1}};$$

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{1}{|x-2|}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера цей ряд буде збіжним, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}<1\Leftrightarrow|x-2|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2>1,\\x-2<-1\end{array}\right.,\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3,\\x<1;\end{array}\right.$$

і розбіжним для

$$\frac{1}{|x-2|}>1\Leftrightarrow<1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2<1,\\x-2>-1;\end{cases}\Leftrightarrow1<x<3.$$

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x=1$ і $x=3$. Для $x=1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а для точки $x=3$ — ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбіжні, бо, очевидно, що для них не виконується необхідна умова збіжності. Отже, областю збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$ буде $x\in(-\infty;\ 1)\cup(3;\ \infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

Застосування степеневих рядів

Застосування до наближених обчислень

Приклад 2. Скільки членів відповідного ряду Маклорена треба взяти, щоб обчислити $\sqrt[5]{33}$ з точністю до 0,001?

Розв'язування.

Використаємо формулу розвинення біноміальної функції в ряд Маклорена

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)^2}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad m\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

Розклад (6) має місце в таких випадках: при $m \ge 0$, якщо $x \in [-1;1]$, при $-1 < m < 0$, якщо $x \in (-1,1)$, при $m \le 1$, якщо $x \in (-1,1)$.

Перетворимо $\sqrt[5]{33}$ так, щоб застосувати формулу (6).

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1} = 2\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}}.$$

Скориставшись рядом, дістанемо такий збіжний знакопереміжний ряд:

$$\sqrt[5]{33} = 2\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^3 + \ldots\right).$$

Для такого ряду похибка у разі обчислення його суми за формулою $S = S_n$ не перевищує за абсолютною величиною першого із відкинутих членів. Обчислюємо за абсолютною величиною члени ряду доти, поки не знайдемо такий, що буде менший за 0,001; це і буде перший із відкинутих членів.

$$|u_1| = 2;\ |u_2| = \frac{1}{80};\ |u_3| = \frac{4}{5\cdot 5\cdot 1024} < 0{,}001.$$

Отже, для обчислення $\sqrt[5]{33}$ з точністю до 0,001 достатньо залишити два члени ряду. Маємо

$$\sqrt[5]{33} \approx 2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}\right) = 2{,}013.$$

Приклад 3. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001.

1) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx;$ 2) $\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx.$

Розв'язування.

1) Скористаємося формулою

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Запишемо ряд для підінтегральної функції $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+...$$

Він збігається на всій числовій осі, тому його можна усюди почленно інтегрувати. Значить,

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+...\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot3!}+\frac{x^5}{5\cdot5!}-\frac{x^7}{7\cdot7!}+...\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}...=$$

$$=1-0{,}0556+0{,}0017-0{,}00003...=0{,}946.$$

Так як четвертий член одержаного знакозмінного ряду менше $\alpha=0{,}001$, то ми відкинули всі члени ряду, починаючи з четвертого.

Значить, $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx0{,}946$.

2) $\displaystyle\int_0^1\cos\frac{x^2}{4}dx.$

Скористаємося формулою $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+...$

Запишемо ряд для підінтегральної функції:

$$\cos\frac{x^2}{4}=1-\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+...$$

Він збігається на всій числовій осі, тому його можна усюди почленно інтегрувати. Значить,

$$\int_0^1\cos\frac{x^2}{4}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{16\cdot2!}+\frac{x^8}{256\cdot4!}-...\right)dx=\left(x-\frac{x^5}{5\cdot32}+\frac{x^9}{9\cdot256\cdot24}-...\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{160}+\frac{1}{55296}-...\approx0{,}994.$$

Наближене інтегрування диференціальних рівнянь

Приклад 4. Знайти розклад у степеневий ряд за степенями $(x-1)$ розв'язку диференціального рівняння $y' = 2x + y^3$, $y(1) = 1$ (записати три перших відмінних від нуля члени цього розкладу).

Розв'язування.

Частинний розв'язок [1] $y(x)$ рівняння $y^{'} = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$ шукають у вигляді розкладу в ряд

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots. \quad (7)$$

Точка $x = 1$ не являється особливою для даного рівняння, тому його розв'язок можна шукати у вигляді ряду:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{y''(1)}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{y'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 + \ldots$$

Тоді маємо:

$$y'(1) = 2 + 1 = 3;$$

$$y'' = 2 + 3y^2 \cdot y'; \; y''(1) = 2 + 3 \cdot 1^2 \cdot 3 = 2 + 9 = 11.$$

Підставивши у формулу, отримуємо

$$y(x) = 1 + \frac{3}{1}(x-1) + \frac{11}{2}(x-1)^2 + \ldots -$$

розклад розв'язку диференціального рівняння.

2.2.3. Ряди Фур'є

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = \pi + x$, задану на проміжку $(-\pi, \pi]$ з періодом 2π.

Розв'язування.

Ряд Фур'є періодичної функції [6] $f(x)$ з періодом 2π, заданої на відрізку $[-\pi; \pi]$, має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (8)$$

де

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \qquad (9)$$

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур’є за формулами (9):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cdot dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{\pi}\cdot x\Big|_{-\pi}^{\pi}+0=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underset{\text{парна}}{\pi\cos nx}\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos nx}_{\text{непарна}}dx=$$

$$=\frac{\pi}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\sin n\pi-\sin 0\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin nx\,dx=\frac{\pi}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underset{\text{непарна}}{\pi\sin nx}\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\sin nx}_{\text{парна}}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x, & dv=\sin nx\,dx\\ du=dx, & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\cdot 0\cdot\cos 0++\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\left(\sin n\pi-\sin 0\right)\right)=-\frac{2}{n}\cos n\pi=$$

$$=-\frac{2}{n}\cdot(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Отже, $a_0=2\pi, a_n=0, b_n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$

Таким чином, за формулою (9) ряд Фур’є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{2\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

або

$$f(x) = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - ...\right).$$

Побудуємо графік даної періодичної функції $y = \pi + x$.

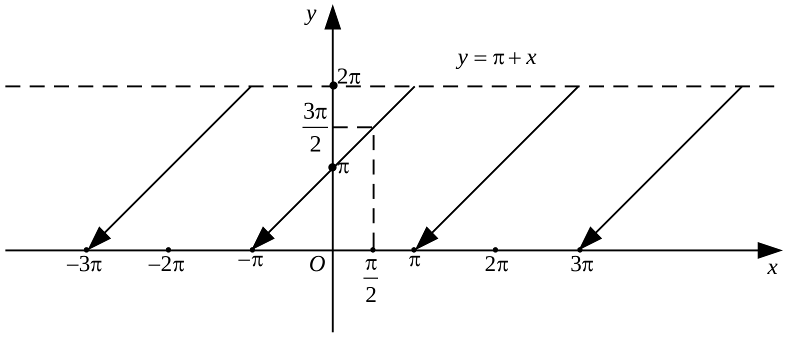

Рис. 1. Вигляд функції.

Сума ряду Фур'є (за теоремою Діріхле) в точках неперервності функції дорівнює її значенню. Наприклад, в точці $x_0 = 0$ сума ряду $S(x_0) = \pi + 0 = \pi$. В точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$ сума ряду $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

В точках розриву, наприклад, в точці $x_0 = \pi$, сума ряду

$$S(\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi-0} f(x) + \lim_{x\to\pi+0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi.$$

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = x^2$, задану на відрізку $[-2, 2]$ з періодом $T = 4$.

Розв'язування.

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l, l]$, де l – довільне додатне число, то ряд Фур'є для такої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{10}$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\ \ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{11}$$

Зауваження. Ряд (8) є частинним випадком ряду (10), а формули (9) є частинними випадками формул (11) при $l=\pi$.

Збіжність ряду (10) визначається, як і для ряду (8), теоремою Діріхле. Ряд (10) збіжний, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-l,l]$ або має на ньому скінченну кількість точок розриву 1-го роду. При цьому сума $S(x)$ в точках неперервності дорівнює значенню функції в цих точках. Якщо x_0 – точка розриву 1-го роду, то суму ряду (10) можна знайти за формулою

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)+\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

На кінцях відрізка $[-l,l]$ сума ряду (10):

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -l+0} f(x)+\lim_{x\to l-0} f(x)\right).$$

За умовою прикладу функція парна, тому $b_n=0$ і треба застосувати формули

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}dx \text{ при } x\in[-l,l], \tag{12}$$

де

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{13}$$

Обчислюємо коефіцієнти за формулами (13) при $l=2$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2, & dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=2xdx, & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{n\pi}x^2\sin\left.\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx, & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8}{n\pi}\sin n\pi \Big|_0 - 0 - \frac{4}{n\pi}\left(-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right) =$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(2\cos n\pi - 0\right) = \frac{16\cos n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{16\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

Ряд Фур'є заданої функції має вигляд $f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$

Приклад 3. Функція $f(x) = x$ задана на проміжку $(0, \pi]$. Розвинути її в ряд Фур'є за косинусами.

Розв'язування.

Дану функцію потрібно довизначити на відрізку $[-\pi, 0]$ так, щоб вона була парною. Покладемо $y = -x$ при $x \in [-\pi, 0]$. Вважаємо функцію періодичною, $T = 2\pi$.

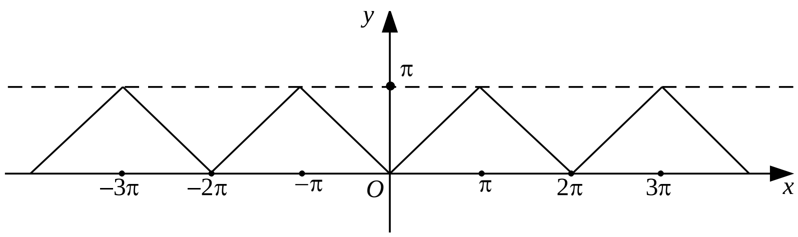

Рис. 2. Парне продовження функції.

Функція неперервна на всій осі.

Якщо функція $f(x)$ парна, то в формулах (8) – (9) коефіцієнти $b_n = 0$ і ряд Фур'є має вигляд $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ для $x \in [-\pi, \pi]$, де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \qquad (14)$$

Коефіцієнти ряду знаходимо за формулами (14):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=\cos nx\,dx \\ du=dx, & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|==\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^\pi}_{0}-\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi-\cos 0\right)=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\left[\begin{matrix}0, & n=2k, \\ \dfrac{2\cdot(-2)}{\pi\left(2k-1\right)^2}, & n=2k-1.\end{matrix}\right.$$

Запишемо ряд Фур’є

$$f\left(x\right)=\frac{\pi}{2}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

або

$$f\left(x\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\cos x}{1}-\frac{2\cos 3x}{9}-\frac{2\cos 5x}{5^2}-\ldots\right).$$

Приклад 4. Розвинути в ряд Фур’є періодичну функцію $y=\begin{cases}1 & \text{при } x\in\left[0,\pi\right), \\ -1 & \text{при } x\in\left[-\pi,0\right),\end{cases}$ задану на проміжку $\left[-\pi,\pi\right)$.

Розв’язування.

Задана функція є непарною, тому в формулах (8) – (9) коефіцієнти $a_n=0$, $a_0=0$. Залишаються лише $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\left(x\right)\sin nx\,dx$ при $x\in\left[-\pi,\pi\right]$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^\pi=-\frac{2}{n\pi}\left(\left(-1\right)^n-1\right)=\left[\begin{matrix}0, & n=2k, \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & n=2k-1.\end{matrix}\right.$$

Запишемо ряд Фур’є

$$f\left(x\right)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2k-1\right)x}{2k-1}.$$

Приклад 5. Розкласти в ряд Фур’є функцію $f\left(x\right)=x+2$, $x\in\left[1,2\right]$.

Розв’язування.

Довизначимо задану функцію.

Можна покласти $f(x)=0$, якщо $x\in(-1,1)$ і $f(x)=-(x+2)$ для $x\in[-2,-1]$. Тоді функція $f(x)$ непарна і коефіцієнти ряду Фур'є обчислюються за формулами

$$a_0=0,\ a_n=0,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \text{ при } l=2.$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x+2, & dv=\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx, & v=-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=-\frac{2(x+2)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=-\frac{8}{n\pi}\cos n\pi+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^{n+1}}{n}+\frac{3}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Додаток 1

Елементи лінійної алгебри

Визначники

другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

або

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Правила Крамера для системи $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix},$$

за умови, що $\Delta \neq 0$.

Матричний спосіб (для системи 3-го порядку) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$

$X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Елементи векторної алгебри

Модуль вектора: $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $|\vec{a}|=\sqrt{x_0{}^2+\ y_0{}^2+z_0{}^2}$.

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $B(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$.

Умова колінеарності векторів: $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\vec{b}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\dfrac{x_0}{x_1}=\dfrac{y_0}{y_1}=\dfrac{z_0}{z_1}$.

Скалярний добуток :

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\ \ \vec{a}\vec{b}=x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1,\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\vec{b}=0$, $x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1=0$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $пр_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Векторний добуток: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=(y_0z_1-y_1z_0)\vec{i}-(x_0z_1-x_1z_0)\vec{j}+(x_0y_1-x_1y_0)\vec{k}$.

Площа паралелограма, трикутника, побудованих на векторах
$\vec{a},\vec{b}$: $S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|$, $S_{тр}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Мішаний добуток: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.

Об'єм паралелепіпеда і піраміди: $V_{пар}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, $V_{пір}=\dfrac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Аналітична геометрія на площині

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$:
$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Загальне рівняння прямої: $Ax+By+C=0$. Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і
$A_2x+B_2y+C_2=0$: $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$:
$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k:
$y-y_0=k(x-x_0)$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k: $y=kx+b$. Для прямих $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою $\mathrm{tg}\,\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Прямі перпендикулярні: $k_1\cdot k_2=-1$.

Відстань від точки $M(x_0, \ y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$, $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1$.

Рівняння параболи з вершиною $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:
$y^2=2px$, $x^2=2py$; $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$.

Аналітична геометрія в просторі

Пряма в просторі

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Кут між двома прямими $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$:

$$\cos\varphi=\frac{m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_2}{p_2}$,

умова перпендикулярності: $m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2=0.$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$: $x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$.

Загальні рівняння прямої: $\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0, \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{cases}$.

Площина в просторі

Рівняння площини через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\perp$ до вектора $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Загальне рівняння площини: $Ax+By+Cz+D=0$.

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Кут між площинами: $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\,\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}$, $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am+Bn+Cp=0$, а умова перпендикулярності $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2+y^2+z^2=R^2$, *еліпсоїд:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Циліндри 2-го порядку: круговий $x^2+y^2=R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; параболічний $y^2=2px$.

Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

*Гіперболоїди:*однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Параболоїд: еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Додаток 5

Функція однієї змінної

Дві важливі границі: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1\pm x\right)^{\pm\frac{1}{x}}=e.$

Основні еквівалентні величини:

$\sin x\sim x,\quad x\to 0$; $\ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ x\to 0$; $e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0;$

$\arcsin x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{tg}x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{arctg}x\sim x,\ x\to 0$; $(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x,\ x\to 0.$

Рівняння дотичної і нормалі

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),\qquad y-y_0=-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right).\ k=\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0).$$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_o)=0$ – критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з + на - , то точка x_0 – точка максимума, якщо з - на +, то точка мінімума.

Значення функцій деяких кутів

$$\sin 0=0,\quad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1;$$

$$\cos 0=1,\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\frac{3\pi}{2}=0;$$

$$\mathrm{tg}\,0=0,\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\text{ – не існує;}$$

$$\mathrm{ctg}\,0\text{ – не існує},\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}=0.$$

Табличне диференціювання

I. Таблиця похідних основних функцій

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$
3. $(\sin x)' = \cos x.$
4. $(\cos x)' = -\sin x.$
5. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
6. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$
9. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$
10. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
11. $(a^x)' = a^x \ln a.$
12. $(e^x)' = e^x.$
13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0).$
14. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x} \quad (x > 0,\ a > 0).$
15. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x.$
16. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x.$
17. $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$
18. $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$

II. Основні правила обчислення похідної. Якщо C – стала величина і $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ – диференційовані функції, тоді

1) $(C)' = 0,$
2) $(x)' = 1,$
3) $(u \pm v)' = u' \pm v',$
4) $(Cu)' = Cu',$
5) $(uv)' = u'v + uv',$
6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0),$
7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$

III. Правило диференціювання складеної функції. Якщо $y = f(u), u = \varphi(x)$, тобто $y = f[\varphi(x)]$, де функції y і u мають похідні, тоді

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'$$

або в інших позначеннях $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}.$

Додаток 7

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,\ \left(\int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \right).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$

13. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C.$

14. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Формула Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі: $\int_a^b u\, dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$

Додаток 8

Функція багатьох змінних. Диференціальні рівняння

Функція багатьох змінних

$z_x' = \frac{\partial z}{\partial x}$ – похідна за змінною x, y – стала;

$z_y' = \frac{\partial z}{\partial y}$ – похідна за змінною y, x – стала.

$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – похідна 2-го порядку за змінною x ;

$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – похідна 2-го порядку за змінною y;

$z''_{xy} = \left(z'_y\right)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – мішана похідна 2-го порядку за змінними x, y.

Диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння 1-го порядку:

З відокремлюваними змінними**:** $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$, розв'язок $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$

Лінійне неоднорідне $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$; $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ – метод Бернуллі.

Диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами (однорідні): $y'' + py' + qy = 0$**.**

Характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ та загальний розв'язок рівняння в залежності від коренів:

1**)** дійсні $k_1 \neq k_2$: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$: $y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$**;**

3) $k_1 = k_2 = k$: $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$**.**

Список літератури

Список використаної літератури

1. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648с.

2. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К.: А.С.К., 2005. – 648с.

3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.

4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы, ряды /Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М., Наука, 1988. – 425с.

5. Шкіль М. І. Математичний аналіз / М. І. Шкіль. Ч.2. – Київ, 1981. – 465 с.

6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (т.2). М.: Наука, 1996. – 416с.

7. Кушлик-Дивульська О.І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: збірник типових завдань кредитного модуля «Вища математика-1» для студентів видавничо-поліграфічного інституту / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Н. П. Селезньова. –Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 149 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/10429.

8. Кушлик-Дивульська О. І. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи кредитного модуля "Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння" для напрямів підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа", 6.050503 "Машинобудування" для студентів Видавничо-поліграфічного інституту [Електронний ресурс] / НТУУ "КПІ"; Уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. − Електронні текстові дані (1 файл: 2,64

Мбайт). − Київ: НТУУ "КПІ", 2013. − 117с. − Назва з екрана. − Доступ http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2838.

9. Кушлик-Дивульська О. І. Конспект лекцій кредитного модуля «Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» (Вища математика-2) для напряму підготовки 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа» [Електронний ресурс] / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. − Електронні текстові данні (1 файл: 3,68 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 241с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/12700.

10. Кулик Г. М. Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей / Г. М. Кулик, О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Степаненко, Н. П. Ярема: НТУУ "КПІ". − Електронні текстові дані (1файл: 5,04 Мбайт). − К.: НТУУ "КПІ". 2016.−278с. – Назва з екрана. –Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/16444.

11. Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : навчальний посібник [для студентів Видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія»] / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук ; відп. ред. С. Д. Івасишен; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,15 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 141 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19572.

Список рекомендованої літератури

1. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 280с.

2. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 352с.

3. Коваленко І. П. Вища математика: навч. посіб. для студентів ВНЗ.– Київ, Вища школа, 2006. – 343с.

4. Лавренчук В. П. Вища математика. Загальний курс. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. / В. П. Лавренчук, О. Р. Мартинюк, О. С. Кондур. – Чернівці, Книга – XXI , 2010. – 319с.

5. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления: учебник для студентов втузов. – Москва, Наука, 1975. –336с.

6. Вища математика: Збірник задач у 2-х частинах. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. За ред. П. П. Овчинникова. – Київ, Техніка, 2004. – 279с.

7. Дюженкова Л. І. Вища математика: приклади і задачі: навч. посіб./ Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Міхалін. – Київ, Академія, 2002. – 624с.

8. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х частинах. Ч. 1. Навч. посіб./ Л.І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. – Київ, Вища школа, 2002. – Ч. 1. – 462с.

9. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу: навч. посіб. / Н. М. Шунда, А. А. Томусяк. – Київ, Вища школа, 1993. – 375 с.

10. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях. Ч.1. Учеб. пос. Для студ. втузов./ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 1. – 320 с.

11. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математичного анализа: учеб. пособие для втузов. / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – Ч. 1. – 464 с.

12. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М, Наука, 1989. – 656 с.

13. Головина Л. И. Линейная алгебра и некотрые ее приложения. М.: Наука, 1985. – 392 с.